

DOTTORATO DI RICERCA  
in  
SCIENZE COMPUTAZIONALI ED INFORMATICHE  
Ciclo XXIII

Consorzio tra Università di Catania, Università di Napoli Federico II,  
Seconda Università di Napoli, Università di Palermo, Università di Salerno

SEDE AMMINISTRATIVA: UNIVERSITÀ DI NAPOLI FEDERICO II



---

*Metodi  $V_0$ -stabili*  
*per la risoluzione di equazioni integrali*  
*di Volterra di seconda specie*

---

*Concetta Chiapparelli*

TESI DI DOTTORATO DI RICERCA

IL COORDINATORE  
Prof. Ernesto Burattini



*A mio figlio*



# Indice

<b>Introduzione</b>	<b>5</b>
<b>1 Richiami sulla teoria delle equazioni integrali di Volterra</b>	<b>10</b>
1.1 Introduzione . . . . .	10
1.2 Problemi modellizzati da equazioni integrali di Volterra . . . . .	11
1.3 Esistenza e unicità della soluzione . . . . .	14
<b>2 Metodi di tipo Runge-Kutta per le equazioni integrali di Volterra di seconda specie</b>	<b>16</b>
2.1 Introduzione . . . . .	16
2.1.1 Metodi di tipo Pouzet (PVRK) . . . . .	19
2.1.2 Metodi di tipo Bel'tyukov (BVRK) . . . . .	20
2.1.3 VRK Natural Continuous Extension . . . . .	21
2.2 Condizioni d'ordine per i metodi VRK . . . . .	23
2.3 Teoria della stabilità . . . . .	35
2.3.1 Stabilità della soluzione esatta . . . . .	35
2.3.2 Stabilità dei metodi numerici . . . . .	40
<b>3 Costruzione di metodi altamente stabili</b>	<b>65</b>
3.1 Introduzione . . . . .	65
3.2 Criterio di Schur . . . . .	66
3.3 Criterio di Routh-Hurwitz . . . . .	68
3.4 Costruzione di metodi con ordine $p > 2$ . . . . .	70

3.4.1	Definizione di $V_0(\alpha)$ -stabilità . . . . .	71
3.4.2	Tecnica del Boundary Locus per VIEs . . . . .	72
3.4.3	Costruzione della funzione $f_{np}$ . . . . .	74
3.4.4	Massimizzazione dell'angolo $\alpha$ di $V_0(\alpha)$ -stabilità . . . . .	76
3.5	Costruzione di metodi PVRK . . . . .	81
3.5.1	Caso $m=2$ ; $p=2$ . . . . .	81
3.5.2	Caso $m=3$ ; $p=3$ . . . . .	86
3.5.3	Caso $m=4$ ; $p=4$ . . . . .	92
3.5.4	Caso $p=m-1=2$ . . . . .	102
3.5.5	Caso $p=m-1=3$ . . . . .	109
3.5.6	Caso $p=m+1=3$ . . . . .	113
3.5.7	Caso $p=m+1=4$ . . . . .	116
3.6	Costruzione di metodi BVRK . . . . .	119
3.6.1	Caso $m=3$ ; $p=3$ ; $d_1=1$ ; $d_3=1$ . . . . .	119
3.6.2	Caso $m=3$ ; $p=3$ ; $d_2=1$ ; $d_3=1$ . . . . .	127
3.6.3	Caso $m=4$ ; $p=3$ ; $d_1=1$ ; $d_3=1$ ; $d_4=1$ . . . . .	133
3.6.4	Caso $m=8$ ; $p=4$ ; $d_1 = d_3 = d_4 = d_5 = d_6 = d_7 = d_8 = 1$ . . . . .	136
3.7	Prove numeriche . . . . .	139
3.7.1	Problema 1 . . . . .	139
3.7.2	Problema 2 . . . . .	140
3.7.3	Problema 3 . . . . .	141
3.7.4	Problema 4 . . . . .	142
3.7.5	Problema 5 . . . . .	143
3.7.6	Problema 6 . . . . .	144
<b>Conclusioni</b>		<b>145</b>
<b>Bibliografia</b>		<b>147</b>

# Ringraziamenti

E' terminato un percorso di studio! E' stato intenso, faticoso, bello, interessante: è stato importante farlo! Voglio ringraziare la Prof.ssa E. Russo che ha creduto in me sin dall'inizio permettendo la realizzazione del *mio sogno nel cassetto*: il dottorato di ricerca anche a tanta distanza dalla mia laurea, sostenendomi nei momenti di maggiore difficoltà. Un abbraccio forte e un sentito ringraziamento a tutto il gruppo di ricerca e a tutti coloro che mi hanno aiutata nel percorso di studi, in particolare vorrei ringraziare il Dott. G. Izzo con il quale ho lavorato in tutti questi anni e che ha avuto la 'pazienza' di aiutarmi e sostenermi. Un ringraziamento speciale a mia madre che mi ha sempre voluto bene è grazie al suo amore e ai suoi sacrifici che sono riuscita sempre ad andare avanti, un grazie a mio marito che con il suo amore mi ha sostenuta e a mio figlio senza il quale tutta la mia vita non avrebbe significato.

# Introduzione

Negli ultimi anni la simulazione matematica per lo studio di fenomeni del mondo reale stà assumendo un ruolo sempre più importante per la descrizione e la comprensione dei fenomeni stessi. Molti problemi di evoluzione con memoria di interesse nelle scienze applicate, quali ad esempio dinamica delle popolazioni, diffusione di epidemie, reti neurali, cinetica di assorbimento, reazioni-diffusioni in piccole cellule, si modellizzano mediante equazioni integrali di Volterra (VIEs) di seconda specie ([1],[2],[3]):

$$y(t) = g(t) + \int_{t_0}^t k(t, \tau, y(\tau)) d\tau, \quad t \in [t_0, T]. \quad (1)$$

$$g, y : t \in [t_0, T] \rightarrow \mathbb{R} \quad k : S \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

dove  $S := \{(t, s) : t_0 \leq s \leq t \leq T\}$ . La funzione  $g(t)$  è detta *forcing function* e  $k(t, s, y(s))$  è detto *nucleo* dell'equazione integrale. A causa della loro complessità, per la maggior parte di questi modelli è molto importante disporre di metodi numerici ad alte prestazioni che consentono di ottenere soluzioni accurate in un tempo ragionevole rispetto all'evoluzione del processo e che mantengono, per quanto è possibile, le proprietà qualitative della soluzione vera ([9]). Inoltre, proprio il loro carattere ereditario ne rende estremamente complicato sia lo studio teorico che i processi di risoluzione. Sebbene la conoscenza degli aspetti teorici delle VIEs si è notevolmente estesa e contemporaneamente sono stati sviluppati numerosi metodi numerici per la loro risoluzione, pochi sono i metodi ad oggi esistenti accurati ed altamente stabili. In particolare, visto lo stretto legame con la teoria relativa ai metodi



numerici per Equazioni Differenziali Ordinarie (ODEs), i principali risultati presenti in letteratura relativi allo studio della stabilità numerica di metodi per VIEs riguardano in primo luogo la studio della  $A$ -stabilità, ovvero l'analisi dell'*incondizionata stabilità* rispetto all'equazione test base:

$$y(t) = 1 + \int_0^t \xi y(\tau) d\tau, \quad t \geq 0, \quad \xi \leq 0. \quad (2)$$

Resta invece solo parzialmente esplorato il campo della  $V_0$ -stabilità, ovvero dell'*incondizionata stabilità numerica* rispetto all'equazione test di convoluzione ([8], [9]):

$$y(t) = 1 + \int_0^t \left( \xi + \eta(t - \tau) \right) y(\tau) d\tau, \quad t \geq 0, \quad \xi \leq 0, \quad \eta \leq 0. \quad (3)$$

Ciò è dovuto sostanzialmente al fatto che, per un metodo numerico per VIEs, la  $V_0$ -stabilità risulta essere una richiesta molto forte. Infatti fino ad oggi, solo pochi metodi  $V_0$ -stabili, al più di ordine due, sono presenti in letteratura. A conferma di ciò vi è il fatto che, negli scorsi anni, risultati sulla non esistenza di metodi  $V_0$ -stabili sono stati forniti per le classi di metodi quali *mixed semi-explicit Volterra Runge-Kutta (VRK) methods*,  *$(\rho, \sigma)$ -reducible quadrature methods*, *multilag and modified multilag methods*, mentre sono state formulate congetture sulla non esistenza di metodi per le classi dei *Pouzet VRK* e degli *High Order Stages General Linear Methods for VIEs* ([7],[38]). Metodi altamente stabili che coinvolgono le derivate del kernel sono stati proposti in ([40],[41],[42]).

Obiettivo della tesi è determinare metodi numerici di ordine  $p > 2$   $V_0$ -stabili, i metodi in esame sono i metodi di tipo Runge-Kutta per la risoluzione numerica di equazioni integrali di Volterra di seconda specie ed in particolare la classe dei metodi di tipo Pouzet (PVRK) e di tipo Bel'tyukov (BVRK). La scelta di questa classe di metodi è stata fatta perchè pur essendo già note le proprietà teoriche di convergenza e di consistenza nessun risultato generale sull'esistenza di metodi VRK  $V_0$ -stabili è presente in letteratura. Infatti

solo pochi metodi  $V_0$ -stabili di ordine al più due sono stati presentati in letteratura e tutti appartengono alla classe dei metodi di tipo Runge-Kutta Bel'tyukov. Le principali problematiche che si incontrano nella ricerca di metodi di ordine alto e incondizionatamente stabili rispetto all'equazione test di convoluzione (3) riguardano principalmente la non facile *gestione* delle numerose equazioni non lineari che scaturiscono dall'imposizione delle condizioni d'ordine e l'individuazione di un criterio generale per la determinazione della  $V_0$ -stabilità all'interno di una famiglia di metodi. In particolare, vista la impossibilità di stabilire o negare l'esistenza di metodi  $V_0$ -stabili all'interno di una classe di metodi, dovuta alla dimensione delle matrici coinvolte ed al crescente numero di condizioni d'ordine non lineari per  $p > 2$ , abbiamo rilevato la necessità di ottenere informazioni sull'ampiezza delle regioni di stabilità dei metodi rispetto all'equazione test di convoluzione (3). Allo scopo di soddisfare tale esigenza e di avere la possibilità di determinare metodi aventi regioni di stabilità ampie ed illimitate, è stata introdotta in questa tesi la nuova definizione di  $V_0(\alpha)$ -stabilità. Grazie al concetto di  $V_0(\alpha)$ -stabilità e all'adattamento alle VIEs della tecnica del Boundary Locus già esistente per le Equazioni Differenziali Ordinarie (ODEs) è stato progettato ed implementato un algoritmo basato su un nuovo metodo per la costruzione di metodi  $V_0(\alpha)$  e  $V_0$ -stabili.

Tale metodo, basato sull'introduzione di una funzione per l'approssimazione dell'angolo  $\alpha$  di  $V_0(\alpha)$ -stabilità, e sull'utilizzo dell'algoritmo di ottimizzazione di Nelder-Mead, consente di determinare una lista di metodi *candidati* ad essere  $V_0$ -stabili. Successivamente, a ciascun elemento della lista viene applicato il criterio di Routh-Hurwitz per la verifica esatta della incondizionata stabilità del metodo.

Abbiamo analizzando i metodi di tipo Runge-Kutta Pouzet e Bel'tyukov effettuando numerose prove con ordine  $p \leq 4$  con diversi valori degli stadi  $m$  e scegliendo differenti strutture di matrici, quasi diagonali o triangolari inferiori, al fine di ottenere metodi  $V_0$ -stabili di ordine maggiore di due e computazionalmente efficienti. Nel caso della sottoclasse dei metodi di tipo Pouzet non

sono stati determinati metodi  $V_0$ -stabili a conferma di quanto congetturato da Brunner et al. ([7]) ma sono stati determinati metodi  $V_0(\alpha)$ -stabili con angolo massimo  $\alpha = 82,36^\circ$  di ordine due. Nel caso della sottoclasse dei metodi di tipo Bel'tyukov sono stati determinati i primi esempi presenti in letteratura di metodi numerici  $V_0$ -stabili di ordine tre e quattro (rispettivamente su quattro e otto stadi) e metodi con angoli di  $V_0(\alpha)$ -stabilità prossimi a  $90^\circ$ . Al fine di verificare la convergenza e l'ordine dei nuovi metodi  $V_0$ -stabili determinati sono stati effettuati dei test numerici con un codice a passo fisso su problemi test lineari e non lineari presi in letteratura.

La tesi è organizzata in tre capitoli.

Nel primo capitolo si introducono le equazioni integrali di Volterra di seconda specie, vengono riportati alcuni esempi di problemi modellizzati da questo tipo di equazioni integrali e infine si riportano gli enunciati dei teoremi di esistenza e unicità della soluzione.

Nel secondo capitolo vengono introdotti i metodi di tipo Runge-Kutta, le due sottoclassi che hanno ricevuto maggiore risalto nell'ambito della comunità scientifica ovvero i metodi di tipo Pouzet e i metodi di tipo Bel'tyukov e la classe VRK Natural Continuous Extension. E' riportata la definizione di ordine di un metodo e descritto il procedimento per la determinazione delle condizioni d'ordine per i metodi VRK, nel caso di ordine  $p \leq 3$  e presentata la tabella delle condizioni d'ordine per i metodi PVRK e BVRK in forma matriciale per  $p \leq 4$ . E', infine, affrontato lo studio teorico della stabilità della soluzione esatta delle VIEs e lo studio teorico della stabilità dei metodi numerici precedentemente introdotti per la risoluzione delle VIEs.

Nel terzo capitolo vengono elencati i criteri generali esistenti per l'individuazione di metodi  $V_0$ -stabili all'interno di famiglie di metodi di ordine  $p$ , viene introdotta la nuova definizione di  $V_0(\alpha)$ -stabilità, la tecnica del Boundary Locus per le VIEs e descritto il metodo ideato per costruire metodi  $V_0(\alpha)$ -stabili e  $V_0$ -stabili di ordine alto. Sono, infine, riportate le numerose prove effettuate

ed i risultati ottenuti per la determinazione di metodi  $V_0$ -stabili o  $V_0(\alpha)$ -stabili nelle sottoclassi PVRK e BVRK per ordine  $p = 2, 3, 4$ , variando il numero degli stadi e la struttura delle matrici per determinare metodi  $V_0$ -stabili di ordine maggiore di due e computazionalmente efficienti. I risultati ottenuti evidenziano che i metodi BVRK sono più stabili dei metodi PVRK, infatti, sono stati determinati metodi BVRK  $V_0$ -stabili di ordine tre e quattro. Si riportano infine i risultati delle prove numeriche per la verifica dell'ordine e della convergenza dei metodi numerici  $V_0$ -stabili determinati.

In conclusione in questa tesi sono stati costruiti i primi esempi di metodi di ordine tre e quattro  $V_0$ -stabili presenti in letteratura è stata introdotta un nuovo metodo per la costruzione di metodi di tipo Runge-Kutta per VIEs con ampie regioni di stabilità, sviluppi futuri riguarderanno la determinazione di metodi VRK di ordine superiore a quattro, lo sviluppo di un software a passo variabile e la generalizzazione del metodo per la costruzione di altre classi di metodi.

# Capitolo 1

## Richiami sulla teoria delle equazioni integrali di Volterra

### 1.1 Introduzione

Una equazione integrale è una equazione funzionale nella quale la funzione incognita compare sotto il segno di uno o più integrali. In una equazione integrale di Volterra (VIE) gli integrali che contengono la funzione incognita sono caratterizzati dall'estremo superiore di integrazione variabile. Una equazione integrale nella funzione incognita  $y$  è detta **equazione integrale di Volterra (non lineare) di seconda specie** se ha la forma:

$$y(t) = g(t) + \int_0^t k(t, s, y(s)) ds \quad t \in I := [0, T] \quad T > 0 \quad (1.1)$$
$$g, y : t \in [0, T] \rightarrow \mathbb{R} \quad k : S \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

dove  $S := \{(t, s) : 0 \leq s \leq t \leq T\}$ , la funzione  $g$ , detta *forcing function*, e  $k(t, s, y(s))$ , detto *nucleo* dell'equazione integrale.

Se la funzione incognita appare solo sotto il segno di integrale l'equazione integrale è detta **equazione integrale di Volterra di prima specie** :

$$\int_0^t k(t, s, y(s)) ds = g(t) \quad t \in I \quad (1.2)$$

Un'equazione integrale di Volterra sarà **lineare** se il kernel ha la forma:

$$k(t, s, y(s)) = k(t, s)y(s) \quad (1.3)$$

Se il kernel di una equazione di Volterra è il prodotto di una funzione regolare e di una funzione debolmente singolare (cioè illimitata ma integrabile):

$$k(t, s, y(s)) = (t - s)^{-\alpha} \gamma(t, s, y) \quad 0 < \alpha < 1 \quad (1.4)$$

diremo che l'equazione integrale è di **tipo Abel**, poichè Abel fu tra i primi a studiare equazioni integrali di prima specie con kernel a debole singolarità, e, storicamente, una delle prime equazioni ad essere studiate fu la cosiddetta *equazione di Abel*:

$$\int_0^t \frac{f(s)}{\sqrt{t-s}} ds = g(t)$$

che è un esempio di equazione singolare di prima specie. Consideriamo una funzione  $\theta(t)$  continua con un numero finito di zeri nell'intervallo  $I$ . L'equazione integrale :

$$\theta(t)y(t) = g(t) + \int_0^t k(t, s, y(s)) ds \quad t \in I \quad (1.5)$$

che può essere vista come una generalizzazione della (1.1) è detta **equazione integrale di Volterra di terza specie**. Nel seguito tratteremo solo VIEs di seconda specie.

## 1.2 Problemi modellizzati da equazioni integrali di Volterra

Le equazioni integrali di Volterra modellizzano molti problemi di fisica, chimica, biologia e ingegneria. Esse sono particolarmente adatte a descrivere

fenomeni evolutivi con memoria e questa caratteristica rende lo studio teorico e la loro risoluzione numerica complessa. Nella tesi tratteremo equazioni integrali di Volterra di seconda specie, riportiamo, dunque, nel seguito alcuni rappresentativi problemi modellizzati da questo tipo di equazioni.

### Modello di Lotka-McKendrick's

Un tipico problema di dinamica delle popolazioni si trova nella forma:

$$B(t) = F(t) + \int_0^t k(t-s)B(s)dt. \quad (1.6)$$

Se  $k(a) = \beta(a)\pi(a)$  dove  $\beta(a)$  è l'età fertile e  $\pi(a)$  è la probabilità di sopravvivenza degli individui in una popolazione strutturata in base all'età, allora, per  $t < a^+$  (dove  $a^+$  è l'età massima di un individuo) l'equazione (1.6) rappresenta il modello di Lotka-McKendrick's che descrive la velocità di nascita  $B(t)$  della popolazione stessa.

### Modello di dinamica virale di infezione da HIV-1

Il modello matematico che descrive la dinamica virale di infezione da HIV-1 è il seguente ([3],[26]):

$$\begin{aligned} P(t) &= \int_0^t F(t-x)e^{-\delta(t-x)}k_i k_s V(x)S(x)dx \\ V(t) &= V_0 e^{-\alpha t} + \int_0^t e^{-c(t-x)}pP(x)dx \quad t \in [0, t_f] \\ S(t) &= S_0 e^{-\beta t} + \int_0^t e^{-\beta(t-x)}[\alpha - k_s V(x)S(x)]dx \end{aligned} \quad (1.7)$$

La (1.7) è un sistema non lineare di tre equazioni integrali di Volterra nelle funzioni incognite  $P(t)$ ,  $V(t)$  ed  $S(t)$  che rappresentano, rispettivamente, la popolazione di cellule infette che produce il virus, la popolazione dei virus e la popolazione di cellule suscettibili all'infezione presenti in una unità di volume di plasma al tempo  $t$ . La funzione  $F(x)$  tiene conto del ritardo che intercorre tra l'infezione di una cellula e la produzione di nuovi virus. Il significato biologico dei rimanenti parametri nella (1.7) si può trovare in [3]. Di fatto,

poichè  $P$ ,  $V$ , ed  $S$  rappresentano tre popolazioni di individui presenti nell'unità di volume di plasma, ci aspettiamo, affinchè il modello sia significativo dal punto di vista biologico, che siano non negative e limitate. Studi analitici sul modello, hanno portato poi ai seguenti risultati. Definiamo  $\lambda_n = \frac{c\delta(b\delta+1)^n}{pk_i k_s}$ , esso rappresenta un parametro di soglia per l'infezione che ci dà informazioni sul comportamento della malattia per  $t \rightarrow \infty$ . Si dimostra che per  $\lambda \geq \frac{\alpha}{\beta}$ ,  $\lim_{t \rightarrow \infty} V(t) = 0$ ,  $\lim_{t \rightarrow \infty} S(t) = \frac{\alpha}{\beta}$  e  $\lim_{t \rightarrow \infty} P(t) = 0$ . Questo significa che, mentre il numero delle cellule suscettibili all'infezione si stabilizza intorno ad un valore noto, la popolazione dei virus e quella delle cellule infette tende a zero. Dunque, in questo caso non c'è sviluppo della malattia. Per  $\lambda_n < \frac{\alpha}{\beta}$ , invece, si dimostra che  $V(t)$  non può tendere a 0 per  $t \rightarrow \infty$  e dunque il paziente si ammala.

### Equazione di rinnovo

Nell'ambito degli studi demografici e per le industrie si può presentare la seguente equazione [12]:

$$y(t) = \int_0^t a(t-s)y(s)ds + f(t), \quad t \in I = [0, T] \quad (1.8)$$

$f \in C^0(I)$  e spesso  $f$  è non negativa e monotona non decrescente e  $a \in L^1([0, \infty))$ , non negativa o non positiva. La (1.8) è un'equazione integrale di Volterra lineare con nucleo di convoluzione.

### Modello di Kermack e Mc Kendric

Kermack e Mc Kendric hanno formulato un modello di evoluzione di un'epidemia indipendente dallo spazio, dato dalla seguente equazione (si veda [27] e relativa bibliografia ivi contenuta):

$$u(t) = S_0 \int_0^t g(u(s))A(t-s)ds + \int_0^t h(s)ds, \quad t \in t \geq 0 \quad (1.9)$$



con

$$u(t) = -\log \frac{S(t)}{S_0}, \quad g(u) = 1 - e^{-u}.$$

$S(t)$  indica la densità dei suscettibili al tempo  $t$ ,  $A$  e  $h$  sono funzioni non negative che descrivono, rispettivamente, l'infettività di un individuo che è stato contagiato al tempo  $t = 0$  e l'influenza della storia che precede l'istante  $t = 0$ . L'equazione (1.9) è un'equazione integrale di Volterra con nucleo di convoluzione non lineare.

### 1.3 Esistenza e unicità della soluzione

Prima di affrontare le problematiche dello studio dei metodi numerici per l'approssimazione della soluzione di una equazione integrale di Volterra riportiamo, per completezza di tesi, solo gli enunciati dei teoremi di esistenza ed unicità della soluzione. Consideriamo l'equazione integrale di Volterra di seconda specie :

$$y(t) = g(t) + \int_0^t k(t, s, y(s)) ds \quad t \in I \quad (1.10)$$

sussistono risultati di esistenza e unicità (globale o locale) in ipotesi di uniforme o puntuale Lipschitzianità della funzione nucleo.

**Teorema 1.3.1** *Sia  $k(t, s, y)$  continua per  $(t, s) \in S$  e per  $y \in R$  e soddisfacente la condizione di Lipschitz uniforme rispetto ad  $y$ :*

$$|k(t, s, y_1) - k(t, s, y_2)| \leq L|y_1 - y_2|, \quad \forall (t, s) \in S, \forall y_1, y_2 \in R$$

*con  $L$  costante di Lipschitz indipendente da  $y_1$  e  $y_2$ . Allora, per ogni  $g$  continua in  $I$ , l'equazione non lineare (1.10) ammette un'unica soluzione  $y$  continua in  $I$ .*

In molti casi, comunque, la condizione imposta sul kernel  $k(t, s, y)$  non sarà soddisfatta per tutti gli  $y \in R$ , ma solo in alcune regioni compatte. In tal caso la soluzione non è garantita su tutto l'intervallo  $[0, T]$ , come mostrato nel seguente teorema [12]:

**Teorema 1.3.2** *Se  $g$  è continua in  $I$  e se  $k(t, s, y)$  è continua nella regione:*

$$\Omega := \{(t, s, y) : (t, s) \in S \quad e \quad |y - g(t)| \leq B\}$$

*e se, inoltre,  $k$  soddisfa la seguente condizione di Lipschitz :*

$$|k(t, s, y_1) - k(t, s, y_2)| \leq L|y_1 - y_2|, \quad \forall (t, s, y_1), (t, s, y_2) \in \Omega$$

*Posto:*

$$M := \max\{|k(t, s, y)| : (t, s, y) \in \Omega\}, \quad T_0 := \min\{T, B/M\}.$$

*allora, l'equazione non lineare (1.10) ammette un'unica soluzione  $y$  continua in  $[0, T_0]$ .*

Questo teorema garantisce l'esistenza della soluzione solo in un intervallo sufficientemente piccolo  $[0, T_0]$ , pertanto è detto teorema di esistenza locale. E', però, possibile estendere per continuità la soluzione oltre  $T_0$ . Quanto la soluzione possa essere estesa oltre  $T_0$  dipende dalle costanti  $B$  ed  $M$ .

Quando una soluzione esplicita della (1.10) non può essere determinata, è possibile ottenere delle informazioni qualitative su di essa. Particolare importanza per la risoluzione numerica della VIE è la regolarità della soluzione cioè la sua differenziabilità, enunciamo, pertanto, il seguente teorema:

**Teorema 1.3.3** *Se  $g(t) \in C^p(I)$  e  $k(t, s, y) \in C^p(S \times R)$ , allora la soluzione della (1.10)  $y(t) \in C^p(I)$ .*

## Capitolo 2

# Metodi di tipo Runge-Kutta per le equazioni integrali di Volterra di seconda specie

### 2.1 Introduzione

Consideriamo l'equazione integrale di Volterra (non lineare) di seconda specie:

$$y(t) = g(t) + \int_0^t k(t, \tau, y(\tau)) d\tau \quad t \in I := [0, T] \quad (2.1)$$

Per poter trattare l'equazione (2.1) numericamente, suddividiamo l'intervallo  $I := [0, T]$  in  $N$  sottointervalli, utilizzando una mesh uniforme di punti  $t_n := nh, n = 0, 1, \dots, N$  con  $h = T/N$  ( $N \geq 1$ ).

Definiamo  $F_n(t)$  il *lag term*, o *history* o *tail term* esatto:

$$F_n(t) := g(t) + \int_0^{t_n} k(t, \tau, y(\tau)) d\tau, \quad t \geq t_n \quad (n = 0, 1, \dots, N-1), \quad (2.2)$$

e definiamo  $\Phi_n(t)$  la *funzione di incremento* esatta (rispetto all'intervallo  $[t_n, t_{n+1}]$ ):

$$h\Phi_n(t) := \int_{t_n}^t K(t, \tau, y(\tau))d\tau, \quad t \in [t_n, T] \quad (n = 0, 1, \dots, N-1). \quad (2.3)$$

Un metodo Runge Kutta VRK si basa su due processi di approssimazione indipendenti l'uno dall'altro: una formula di approssimazione per la funzione di incremento  $\Phi_n(t)$ , cioè una formula di approssimazione (locale) nell'intervallo  $[t_n, t_{n+1}]$  denotata con  $\tilde{\Phi}_n(t)$  detta *Volterra-Runge-Kutta formula* (VRK formula); una formula di approssimazione del lag term  $F_n(t)$  cioè una formula di approssimazione nell'intervallo  $[0, t_n]$  denotata con  $\tilde{F}_n(t)$  detta *lag term formula*.

L'esatta soluzione nel punto  $t = t_{n+1} = t_n + h$  sarà approssimata da:

$$y_{n+1} = \tilde{F}_n(t_n + h) + h\tilde{\Phi}_n(t_n + h) \quad n = 0, \dots, N-1. \quad (2.4)$$

Tra i metodi di tipo Runge-Kutta scegliamo il seguente metodo implicito ad m stadi detto *metodo VRK*:

$$\begin{cases} Y_j^{(n)} = \tilde{F}_n(t_n + \theta_j h) + \sum_{i=1}^m a_{j,i} k(t_n + d_{j,i} h, t_n + c_i h, Y_i^{(n)}) \\ y_{n+1} = \tilde{F}(t_n + h) + h \sum_{j=1}^m b_j k(t_n + e_j h, t_n + c_j h, Y_j^{(n)}) \end{cases} \quad (j = 1, \dots, m) \quad (2.5)$$

Il metodo (2.5) risulta completamente caratterizzato dai parametri  $c_j, b_j, a_{j,i}, d_{j,i}, e_j, \theta_j$ . Un metodo VRK è detto *esplicito* o *diagonale implicito* se  $a_{j,i} = 0$  rispettivamente per  $i \geq j$  o per  $i > j$  ed è detto *implicito* se esso non rientra nei due casi precedenti.

Una VRK metodo si dirà di tipo *extended*, *mixed* o  $\gamma$ -*modificato* in funzione della scelta della lag term formula:

- *metodo VRK extended*:

$$\tilde{F}_n(t) := g(t) + h \sum_{l=0}^{n-1} \sum_{j=1}^m b_j k(t + (e_j - 1)h, t_l + c_j h, Y_j^{(l)}) \quad (2.6)$$

$$n = 0, \dots, N-1$$

- *metodo VRK mixed :*

$$\tilde{F}_n(t) := g(t) + h \sum_{l=0}^n w_{n,l} k(t, t_l, y_l) \quad (2.7)$$

$$n = \tilde{\kappa}, \dots, N-1$$

la scelta di  $\tilde{\kappa}$  dipende dall'ordine di convergenza della formula di quadratura con pesi  $\{w_{n,l}\}$ ;

- *metodo VRK  $\gamma$ -modified:*

$$\tilde{F}_n^*(t) := \tilde{F}_n(t) + \gamma(t)[y_n - \tilde{F}_n(t_n)] \quad (2.8)$$

dove  $\tilde{F}_n(t)$  è un'approssimazione di  $F_n(t)$  e la funzione  $\gamma(t)$  è tale che  $\gamma(t_n + \theta_j h) \in [0, 1]$ . Questo tipo di approssimazione del lag term è stata introdotta per richiedere che se il metodo VRK è applicato alla forma integrale della ODE :  $y'(t) = f(t, y(t))$ , esso può essere ridotto al risultante schema del metodo RK associato alla suddetta ODE, ciò infatti, avviene se  $y_n = \tilde{F}_n(t)$   $n = 1, \dots, N-1$ .

Le due più importanti classi di metodi VRK extended e mixed possono essere viste come due casi estremi di:

$$\tilde{F}_n(t) = g(t) + h \sum_{l=-1}^{n-1} \sum_{j=1}^{m+1} w_{n,l,j} k(t + (e_j - 1)h, t_l + c_j h, Y_j^{(l)}) \quad (2.9)$$

(con  $w_{n,-1,j} = 0$  per  $j \leq m$ ,  $Y_{l,m+1} := y_{l+1}$ ,  $c_{m+1} = e_{m+1} := 1$ , e  $n \geq \tilde{\kappa}$ ), dove la formula di quadratura che costituisce la seconda parte del termine a destra del segno di uguaglianza coinvolge sia punti intermedi che punti di rete. Segue dalla formula (2.9) che una extended lag term formula (2.6) si ottiene se i pesi  $\{w_{n,l,j}\}$  assumono i valori:

$$w_{n,l,j} = \begin{cases} b_j, & \text{se } 1 \leq j \leq m \quad (0 \leq l \leq n-1), \\ 0, & \text{se } j = m+1 \quad \text{o } l = -1. \end{cases} \quad (2.10)$$

Una mixed lag term formula è caratterizzata da:

$$w_{n,l,j} = \begin{cases} w_{n,l+1}, & \text{se } j = m + 1 \quad (-1 \leq l \leq n - 1), \\ 0, & \text{altrimenti.} \end{cases} \quad (2.11)$$

In poche parole, una mixed lag term formula utilizza solo punti di rete mentre una extended lag term formula utilizza solo punti intermedi.

Le due sottoclassi che hanno ricevuto maggiore risalto nella comunità scientifica sono: i metodi di tipo Pouzet e i metodi di tipo Bel'tyukov. Infatti, per la loro particolare struttura questi metodi sono stati ampiamente studiati, negli ultimi anni, principalmente per l'ordine raggiunto e per le loro proprietà di stabilità, per tale motivo gli abbiamo scelti per raggiungere l'obiettivo della tesi di determinare metodi di ordine alto e fortemente stabili.

### 2.1.1 Metodi di tipo Pouzet (PVRK)

Se nella (2.5) si pone  $dj, i = c_j$ ,  $e_j = 1$ ,  $\theta_j = c_j$  ( $i, j = 1, \dots, m$ ), otteniamo la forma implicita del metodo Runge-Kutta di tipo Pouzet per la (2.1):

$$\begin{cases} Y_j^{(n)} = \tilde{F}_n(t_n + c_j h) + h \sum_{i=1}^m a_{j,i} k(t_n + c_j h, t_n + c_i h, Y_i^{(n)}) \\ \hspace{15em} (j = 1, \dots, m) \\ y_{n+1} = \tilde{F}_n(t_n + h) + h \sum_{j=1}^m b_j k(t_n + h, t_n + c_j h, Y_j^{(n)}) \\ \hspace{15em} (n = 0, \dots, N - 1) \end{cases} \quad (2.12)$$

Il metodo PVRK risulta completamente determinato nota la matrice:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \dots & a_{1,m} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m,1} & a_{m,2} & \dots & a_{m,m} \end{bmatrix}$$

e i vettori:

$$\mathbf{c} = [c_1, c_2, \dots, c_m]^T \quad \mathbf{b} = [b_1, b_2, \dots, b_m]^T$$

Un metodo PVRK può essere rappresentato usando il cosiddetto *Butcher's Array*:

$$\begin{array}{c|c} \mathbf{c} & \mathbf{A} \\ \hline & \mathbf{b}^T \end{array}$$

Osserviamo che nella forma esplicita il limite superiore della prima formula della (2.12) diviene  $j - 1$ . Il numero di valutazioni del kernel per passo nella PVRK formula è, in generale, uguale a  $m(m+1)$  nel caso implicito,  $m(m+3)/2$  nel caso diagonale implicito e  $m(m+1)/2$  nel caso esplicito. Ovviamente, questo numero si riduce se alcuni parametri  $a_{j,i}$  sono nulli o se alcuni dei  $c_j$  sono uguali. Affinchè l'argomento di  $k$  in (2.12) appartenga a  $S \times R$ , deve essere soddisfatta la seguente *kernel condition*:

$$c_j \geq c_i \quad \text{se} \quad a_{j,i} \neq 0 \quad (2.13)$$

Per i metodi espliciti questa condizione è soddisfatta se  $c_1 \leq c_2 \leq \dots \leq c_m \leq 1$ . Se non si impone la condizione (2.13) il metodo implicito, generalmente, utilizza valori del kernel  $k(t, s, y)$  con  $s > t$ . In questo caso il dominio di  $k(t, s, y)$  deve essere esteso per includere i punti  $(t, s)$  richiesti che si trovano fuori da  $S$ . Questo può creare problemi di accuratezza del risultato numerico visto che un'estensione continua del kernel, anche se regolare, è arbitraria e non legata all'equazione integrale di partenza. Il problema si può risolvere usando i cosiddetti metodi modificati di Hoog e Weiss che si ottengono modificando la VRK formula del metodo implicito di Pouzet in modo opportuno.

### 2.1.2 Metodi di tipo Bel'tyukov (BVRK)

Se nella (2.5) si pone  $d_{j,i} = d_i$ ,  $e_j = d_j$ ,  $\theta_j = c_j$  ( $i, j = 1, \dots, m$ ), otteniamo la forma implicita del metodo Runge-Kutta di tipo Bel'tyukov per

la (2.1):

$$\left\{ \begin{array}{l} Y_j^{(n)} = \tilde{F}_n(t_n + c_j h) + h \sum_{i=1}^m a_{j,i} k(t_n + d_i h, t_n + c_i h, Y_i^{(n)}) \\ \qquad \qquad \qquad (j = 1, \dots, m) \\ y_{n+1} = \tilde{F}_n(t_n + h) + h \sum_{j=1}^m b_j k(t_n + d_j h, t_n + c_j h, Y_j^{(n)}) \\ \qquad \qquad \qquad (n = 0, \dots, N - 1) \end{array} \right. \quad (2.14)$$

Un metodo BVRK può essere rappresentato come:

$$\begin{array}{c|c|c} \mathbf{d} & \mathbf{c} & \mathbf{A} \\ \hline & & \mathbf{b}^T \end{array}$$

Il metodo BVRK risulta completamente determinato nota la matrice:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \dots & a_{1,m} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m,1} & a_{m,2} & \dots & a_{m,m} \end{bmatrix}$$

e i vettori:

$$\mathbf{c} = [c_1, c_2, \dots, c_m]^T \quad \mathbf{b} = [b_1, b_2, \dots, b_m]^T \quad \mathbf{d} = [d_1, d_2, \dots, d_m]^T$$

Il numero di valutazioni del kernel per passo nella BVRK formula è, in generale, uguale ad  $m$  indipendentemente dal fatto che il metodo sia implicito, diagonale implicito o esplicito. Per questo tipo di metodi la *kernel condition* risulta essere:

$$d_j \geq c_j \quad j = 1, \dots, m \quad (2.15)$$

E' qui il caso di osservare che ogni metodo VRK (incluso i PVRK) può essere scritto come un metodo BVRK con un possibile incremento del numero degli stadi [10]. Per tale motivo, lo studio dei metodi BVRK risulta essere uno studio esaustivo.

### 2.1.3 VRK Natural Continuous Extension

In questo paragrafo introduciamo una classe molto generale di metodi Runge-Kutta per la risoluzione numerica di equazioni integrali di Volterra del secondo tipo



che comprende, come casi speciali, tutti i metodi più importanti che sono stati considerati in letteratura. Questi metodi RK Natural Continuous Extension sono costruiti utilizzando funzioni polinomiali a tratti che estendono l'approssimazione dei punti di griglia a tutto l'intervallo di integrazione. Le particolari proprietà richieste a questi metodi permettono di costruire approssimazioni del lag term che risultano molto efficienti in termini di numero di valutazione del kernel.

I metodi trattati di seguito utilizzano una notazione unificante per le formule RK per VIEs, introducendo un gran numero di parametri, tale maggior numero di gradi di libertà conduce alla costruzione di metodi che presentano migliori proprietà di stabilità [8].

Per costruire questi metodi, detti VRK Natural Continuous Extension, consideriamo la VIE (2.1) e discretizziamo l'intervallo  $I := [0, T]$  consideriamo una mesh uniforme di punti con passo  $h \geq 0$  definita dalla griglia  $t_i = ih$  ( $i = 0, 1, \dots, N$ ) con  $N \geq 1$  e  $h = T/N$ . Denotiamo con  $y_n$  un'approssimazione della esatta soluzione  $y$  della (2.1) nel punto  $t_n$ . La classe di metodi VRK Natural Continuous Extension ha la seguente formulazione:

$$Y_i^{(n)} = F_n(t_{n-1} + \theta_i h) + h \sum_{j=1}^{\mu} \alpha_{ij} k(t_{n-1} + d_{ij} h, t_{n-1} + e_{ij} h, \sum_{l=1}^{\nu} \beta_{ijl} Y_l^{(n)}), \quad (2.16)$$

$$y_n = \sum_{i=1}^{\nu} w_i Y_i^{(n)}$$

per  $i = 1, 2, \dots, \nu$ ,  $n = 1, 2, \dots, N$ , dove:

$$F_n(t) := g(t) + h \sum_{k=1}^{n-1} \sum_{j=1}^m v_j k(t, t_{k-1} + \xi_j h, u(t_{k-1} + \xi_j h)) \quad (2.17)$$

è un'approssimazione del lag term:

$$F(t) := g(t) + \int_0^{t_{n-1}} k(t, s, y(s)) ds$$

per  $t \in (t_{n-1}, t_n]$ ;  $u$  è una Natural Continuous Extension [17] della soluzione numerica definita da:

$$u(t_{k-1} + \theta h) := \sum_{i=1}^{\nu} w_i(\theta) Y_i^{(k)} \quad (\theta \in [0, 1]) \quad (2.18)$$

con  $w_i$  ( $i = 1, \dots, \nu$ ) polinomi dati. Qui,  $\theta_i, \alpha_{ij}, d_{ij}, e_{ij}, \beta_{ijl}, w_i, v_j$  e  $\xi_j$  sono i parametri del metodo.

## 2.2 Condizioni d'ordine per i metodi VRK

Consideriamo il metodo VRK ad  $m$  stadi implicito (2.5) e supponiamo che il lag term sia esatto (ipotesi di localizzazione), il metodo numerico assume la forma:

$$\begin{cases} \bar{Y}_j^{(n)} = F_n(t_n + \theta_j h) + h \sum_{i=1}^m a_{j,i} k(t_n + d_{j,i} h, t_n + c_i h, \bar{Y}_i^{(n)}) \\ \bar{y}_{n+1} = F_n(t_n + h) + h \sum_{j=1}^m b_j k(t_n + e_j h, t_n + c_j h, \bar{Y}_j^{(n)}) \end{cases} \quad (j = 1, \dots, m) \quad (2.19)$$

**Definizione 2.1** La VRK formula è detta (localmente) consistente di ordine  $p$  se per tutte le equazioni integrali di Volterra di seconda specie con  $k$  e  $g$  sufficientemente differenziabili e per tutti gli  $h > 0$  sufficientemente piccoli,  $p$  è il più grande intero per cui si ha:

$$|y(t_n + h) - \bar{y}_{n+1}| \leq Ch^{p+1} \quad (t_{n+1} = (n+1)h \text{ fissato}, h \rightarrow 0)$$

con  $C$  indipendente da  $n$  e  $h$ , dove  $\bar{y}_{n+1} = F_n(t_n + h) + h\bar{\Phi}_n(t_n + h)$ .

Osserviamo che:

$$\bar{\Phi}_n(t) := \sum_{j=1}^m b_j k(t + (e_j - 1)h, t_n + c_j h, \bar{Y}_j^{(n)})$$

dalla seconda equazione di (2.19), deduciamo che:

$$h(\Phi_n(t_n + h) - \bar{\Phi}_n(t_n + h)) = y(t_{n+1}) - \bar{y}_{n+1} = O(h^{p+1})$$

Quindi, la funzione di incremento locale  $\bar{\Phi}_n$  rappresenta un'approssimazione di ordine  $p$  della funzione di incremento esatta quando, nella locale approssimazione (2.19), si utilizza il lag term esatto in  $[t_n, t_{n+1}]$ .

Un metodo numerico, ha ordine locale di consistenza  $p$  se:

$$y(t_{n+1}) = \bar{y}_{n+1} + O(h^{p+1}) = F_n(t_n + h) + h\bar{\Phi}_n(t_n + h) + O(h^{p+1})$$

Si sviluppa il primo e secondo membro in serie di Taylor di punto iniziale  $t_n$  e si considera la seguente uguaglianza:

$$y(t_{n+1}) = \bar{y}_{n+1} + O(h^{p+1})$$

Eguagliando i termini dello sviluppo con uguale potenza di  $h$ , si ottengono le **condizioni d'ordine**. Ovviamente, è usuale che insieme a tali condizioni, i parametri del VRK metodo devono verificare la row-sum condition:

$$\theta_j = c_j = \sum_{i=1}^m a_{j,i} \quad (j = 1, \dots, m) \quad (2.20)$$

Consideriamo il metodo VRK implicito con lag term esatto (2.19) e descriviamo il procedimento per la determinazione delle condizioni d'ordine nel caso di ordine  $p \leq 3$ .

Consideriamo la seconda equazione della (2.19):

$$\bar{y}_{n+1} = F_n(t_n + h) + h \sum_{j=1}^m b_j k(t_n + e_j h, t_n + c_j h, \bar{Y}_j^{(n)})$$

Sviluppiamo in serie di Taylor  $\bar{y}_{n+1}$ ,  $y(t_{n+1})$ ,  $\bar{Y}_j^{(n)}$  e trascuriamo i termini dello sviluppo alla potenza quarta di  $h$ . Incominciamo sviluppando  $k(t_n + e_j h, t_n + c_j h, \bar{Y}_j^{(n)})$  di punto iniziale  $(t_n, t_n, y(t_n))$ :

$$\begin{aligned} K(t_n + e_j h, t_n + c_j h, \bar{Y}_j^{(n)}) &= k(t_n, t_n, y(t_n)) + k_t(t_n, t_n, y(t_n)) \frac{(e_j h)}{1!} \\ &+ k_s(t_n, t_n, y(t_n)) \frac{(c_j h)}{1!} + k_y(t_n, t_n, y(t_n)) \frac{(\bar{Y}_j^{(n)} - y(t_n))}{1!} \\ &+ k_{tt}(t_n, t_n, y(t_n)) \frac{(e_j h)^2}{2!} + 2k_{ts}(t_n, t_n, y(t_n)) \frac{(e_j h)(c_j h)}{2!} \\ &+ 2k_{ty}(t_n, t_n, y(t_n)) \frac{(e_j h)(\bar{Y}_j^{(n)} - y(t_n))}{2!} + k_{ss}(t_n, t_n, y(t_n)) \frac{(c_j h)^2}{2!} \\ &+ 2k_{sy}(t_n, t_n, y(t_n)) \frac{(c_j h)(\bar{Y}_j^{(n)} - y(t_n))}{2!} + k_{yy}(t_n, t_n, y(t_n)) \frac{(\bar{Y}_j^{(n)} - y(t_n))^2}{2!} + O(h^3) \end{aligned}$$

Posto  $k(t_n, t_n, y(t_n)) = k$  si ha:

$$\begin{aligned} k(t_n + e_j h, t_n + c_j h, \bar{Y}_j^{(n)}) &= k + k_t e_j h + k_s c_j h + k_y (\bar{Y}_j^{(n)} - y(t_n)) \\ &+ k_{tt} \frac{e_j^2 h^2}{2} + k_{ts} e_j c_j h^2 + k_{ty} e_j h (\bar{Y}_j^{(n)} - y(t_n)) + k_{ss} \frac{c_j^2 h^2}{2} \\ &+ 2k_{sy} \frac{(c_j h)(\bar{Y}_j^{(n)} - y(t_n))}{2} + k_{yy} \frac{(\bar{Y}_j^{(n)} - y(t_n))^2}{2} + O(h^3) \end{aligned}$$

Da cui:

$$\begin{aligned} \bar{y}_{n+1} &= F_n(t_n + h) + h \sum_{j=1}^m b_j k + h^2 \sum_{j=1}^m b_j [e_j k_t + c_j k_s + k_y (\bar{Y}_j^{(n)} - y(t_n))] \\ &+ h^3 \sum_{j=1}^m b_j \left[ \frac{1}{2} e_j^2 k_{tt} + \frac{1}{2} c_j^2 k_{ss} + \frac{1}{2} k_{yy} (\bar{Y}_j^{(n)} - y(t_n))^2 \frac{1}{h^2} + k_{ts} c_j e_j + (\bar{Y}_j^{(n)} - y(t_n)) (e_j k_{ty} + c_j k_{sy}) \frac{1}{h} \right] + O(h^4) \end{aligned}$$

Sviluppiamo in serie di Taylor di punto iniziale  $t_n, y(t_{n+1})$ , otteniamo:

$$\begin{aligned} y(t_{n+1}) &= F_n(t_{n+1}) + h k + h^2 \left[ k_t + \frac{1}{2} k_s + \frac{1}{2} k_y F'_n + \frac{1}{2} k_y k \right] \\ &+ \frac{1}{6} h^3 [k_y F''_n + 2k_y k_t + k_y k_s + k_y^2 F'_n + k_y^2 k + 3k_{tt} + k_{ss} + 3k_{ts} + k_{yy} F_n'^2 + k_{yy} k^2 \\ &+ 2k_{yy} F'_n k + 2k_{sy} F'_n + 2k_{sy} k + 3k_{ty} F'_n + 3k_{ty} k] + O(h^4) \end{aligned}$$

Consideriamo la prima equazione della (2.19):

$$\bar{Y}_j^{(n)} = F_n(t_n + \theta_j h) + h \sum_{i=1}^m a_{j,i} K(t_n + d_{j,i} h, t_n + c_i h, \bar{Y}_i^{(n)})$$

Sviluppiamo in serie di Taylor si ha:

$$\bar{Y}_j^{(n)} = F(t_n) + F'(t_n) \theta_j h + F''(t_n) \frac{\theta_j^2 h^2}{2} + h \sum_{i=1}^m a_{j,i} [k + k_t d_{ji} h + k_s c_i h + k_y (\bar{Y}_i^{(n)} - y(t_n))]$$

Considerato che  $F(t_n) = y(t_n)$  si ha:

$$\frac{\bar{Y}_j^{(n)} - y(t_n)}{h} = \sum_{i=1}^m a_{j,i} k + F'_n \theta_j + h \left[ F''_n \frac{\theta_j^2}{2} + \sum_{i=1}^m a_{j,i} k_t d_{ji} + \sum_{i=1}^m a_{j,i} k_s c_i \right]$$

$$+ \sum_{i=1}^m a_{j,i} \sum_{i=1}^m a_{j,i} k_y k + \sum_{i=1}^m a_{j,i} k_y \theta_j F'_n] + O(h^2)$$

Uguagliando  $\bar{y}_{n+1} = y(t_n + 1)$  si ha:

$$\begin{aligned} F_n(t_{n+1}) + h \sum_{j=1}^m b_j k + h^2 \sum_{j=1}^m b_j [e_j k_t + c_j k_s + \theta_j F'_n k_y + \sum_{i=1}^m a_{j,i} k_y k] \\ + h^3 \sum_{j=1}^m b_j [\frac{1}{2} \theta_j^2 F''_n k_y + \sum_{i=1}^m a_{j,i} d_{ji} k_t k_y + \sum_{i=1}^m a_{j,i} c_i k_s k_y + \sum_{i=1}^m a_{j,i} \theta_i k_y^2 F'_n \\ + \frac{1}{2} e_j^2 k_{tt} + \frac{1}{2} c_j^2 k_{ss} + \frac{1}{2} k_{yy} (\sum_{i=1}^m a_{j,i} k + F'_n \theta_j)^2 + k_{ts} c_j e_j + e_j k_{ty} \theta_j F'_n + e_j k_{ty} \sum_{i=1}^m a_{j,i} k \\ + c_j k_{sy} \theta_j F'_n + c_j k_{sy} \sum_{i=1}^m a_{j,i} k] = F_n(t_{n+1}) + h k + h^2 [k_t + \frac{1}{2} k_s + \frac{1}{2} k_y F'_n + \frac{1}{2} k_y k] \\ + \frac{1}{6} h^3 [k_y F''_n + 2k_y k_t + k_y k_s + k_y^2 F'_n + k_y^2 k + 3k_{tt} + k_{ss} + 3k_{ts} + k_{yy} F_n'^2 + k_{yy} k^2 \\ + 2k_{yy} F'_n k + 2k_{sy} F'_n + 2k_{sy} k + 3k_{ty} F'_n + 3k_{ty} k] + O(h^4) \end{aligned}$$

Uguagliando secondo le potenze di  $h$  si ottengono le condizioni per  $p \leq 3$ :

$$p = 1 \quad \sum_j b_j = 1$$

$$\begin{aligned} p = 2 \quad \sum_j b_j e_j &= 1 \\ \sum_j b_j c_j &= \frac{1}{2} \quad \sum_j b_j \theta_j = \frac{1}{2} \quad \sum_j b_j \sum_i a_{ji} = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} p = 3 \quad \sum_j b_j \theta_j^2 &= \frac{1}{3} \\ \sum_j b_j \sum_i a_{ji} d_{ji} &= \frac{1}{3} \\ \sum_j b_j \sum_i a_{ji} c_i &= \frac{1}{6} \\ \sum_i \sum_j b_i a_{ij} \theta_j &= \frac{1}{6} \quad \sum_j b_j \sum_{i,e} a_{ji} a_{ie} = \frac{1}{6} \\ \sum_i b_i e_i^2 &= 1 \quad \sum_i b_i c_i^2 = \frac{1}{3} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\sum_j b_j \theta_j^2 &= \frac{1}{3} & \sum_i b_i \sum_j a_{ji}^2 &= \frac{1}{3} & \sum_j b_j \theta_j \sum_i a_{ji} &= \frac{1}{3} \\
\sum_i b_i c_i e_i &= \frac{1}{2} \\
\sum_i b_i \theta_i e_i &= \frac{1}{2} \\
\sum_j b_j e_j \sum_i a_{ji} &= \frac{1}{2} \\
\sum_i b_i \theta_i c_i &= \frac{1}{3} \\
\sum_j b_j c_j \sum_i a_{ji} &= \frac{1}{3}
\end{aligned}$$

Con procedimento analogo si determinano le condizione d'ordine per  $p \leq 4$  per i metodi PVRK e BVRK della tabella (2.1) che per maggiore semplicità di lettura, vengono espresse in forma matriciale. In tale tabella il simbolo  $\cdot^*$  indica il prodotto elemento per elemento,  $\mathbf{b}, \mathbf{c}, \mathbf{d}, \mathbf{e}$  rappresentano i seguenti vettori:

$$\begin{aligned}
\mathbf{b} &= (b_1, b_2, \dots, b_m)^T, & \mathbf{e} &= (1, 1, \dots, 1)^T, & \mathbf{d} &= (d_1, d_2, \dots, d_m)^T \\
\mathbf{c} &= (c_1, c_2, \dots, c_m)^T
\end{aligned}$$

$\mathbf{A}, \mathbf{diagc}, \mathbf{diagd}$ , le seguenti matrici:

$$\begin{aligned}
\mathbf{A} &= \begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \dots & a_{1,m} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m,1} & a_{m,2} & \dots & a_{m,m} \end{bmatrix} \\
\mathbf{diagd} &= \begin{bmatrix} d_1 & & & \\ & \dots & & \\ & & d_m & \end{bmatrix}, & \mathbf{diagc} &= \begin{bmatrix} c_1 & & & \\ & \dots & & \\ & & & c_m \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

ordine	PVRK	BVRK
p=1	1. $b^T e = 1$	1. $b^T e = 1$
p=2	2. $b^T c = \frac{1}{2}$	2. $b^T d = 1$ 3. $b^T c = \frac{1}{2}$
p=3	3. $b^T(c * c) = \frac{1}{3}$ 4. $b^T A c = \frac{1}{6}$	4. $b^T(d * d) = 1$ 5. $b^T(c * d) = \frac{1}{2}$ 6. $b^T(c * c) = \frac{1}{3}$ 7. $b^T A d = \frac{1}{3}$ 8. $b^T A c = \frac{1}{6}$
p=4	5. $b^T(c * c * c) = \frac{1}{4}$ 6. $b^T(diag c A c) = \frac{1}{8}$ 7. $b^T(A(c * c)) = \frac{1}{12}$ 8. $b^T A A c = \frac{1}{24}$	9. $b^T(d * d * d) = 1$ 10. $b^T(c * d * d) = \frac{1}{2}$ 11. $b^T(c * c * d) = \frac{1}{3}$ 12. $b^T(c * c * c) = \frac{1}{4}$ 13. $b^T(diag d A d) = \frac{1}{3}$ 14. $b^T(diag c A d) = \frac{1}{4}$ 15. $b^T(diag d A c) = \frac{1}{6}$ 16. $b^T(diag c A c) = \frac{1}{8}$ 17. $b^T(A(c * d)) = \frac{1}{8}$ 18. $b^T(A(c * c)) = \frac{1}{12}$ 19. $b^T(A(d * d)) = \frac{1}{4}$ 20. $b^T A A d = \frac{1}{12}$ 21. $b^T A A c = \frac{1}{24}$

Tabella 2.1: Condizioni d'ordine VRK formula

Nella tabella (2.2) vengono confrontati il numero delle condizioni d'ordine per i metodi PVRK e BVRK. In tale tabella  $p$  indica l'ordine del metodo,  $N_p$  il numero totale delle condizioni d'ordine che bisogna verificare affinché il metodo abbia ordine  $p$  ed  $n_p$  indica il numero delle condizioni d'ordine che bisogna aggiungere per incrementare l'ordine da  $p - 1$  a  $p$ .

Ordine $p$		1	2	3	4	5	6
<b>PVRK</b>	$n_p$	1	1	2	4	9	20
	$N_p$	1	2	4	8	17	37
<b>BVRK</b>	$n_p$	1	2	5	13	37	108
	$N_p$	1	3	8	21	58	166

Tabella 2.2: Numero di condizioni d'ordine per i metodi BVRK e PVRK

Osservando le tabelle (2.1) e (2.2) si vede che al crescere dell'ordine cresce il numero di condizioni d'ordine sia per i metodi PVRK che per i metodi BVRK. In particolare per i metodi BVRK per  $p = 2$  le condizioni d'ordine sono tre; per  $p = 3$  le condizioni d'ordine sono otto e per  $p = 4$  le condizioni d'ordine sono addirittura ventuno fino ad arrivare a centosessantasei per ordine  $p = 6$ . Questo, aggiunto al fatto che, come si vede dalla tabella (2.1) per  $p \leq 4$ , le condizioni d'ordine sono equazioni non lineari nei parametri del metodo fa comprendere la difficoltà che si incontra nel determinare metodi di ordine  $p > 2$ .

Consideriamo il metodo PVRK (2.12):

$$\left\{ \begin{array}{l} Y_j^{(n)} = \tilde{F}_n(t_n + c_j h) + h \sum_{i=1}^m a_{j,i} K(t_n + c_j h, t_n + c_i h, Y_i^{(n)}) \\ \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad (j = 1, \dots, m) \\ y_{n+1} = \tilde{F}_n(t_n + h) + h \sum_{j=1}^m b_j K(t_n + h, t_n + c_j h, Y_j^{(n)}) \\ \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad (n = 0, \dots, N - 1) \end{array} \right.$$

Nel suo articolo Pouzet [36] mostra che se un dato metodo RK per ODEs del primo ordine ha ordine locale  $p = m$  il corrispondente metodo PVRK esplicito ad  $m$



stadi ha lo stesso ordine  $p$ . Questo risultato fù generalizzato ad un qualunque metodo RK per ODEs ad  $m$  stadi [10]; in tale articolo si dimostra il seguente teorema:

**Teorema 2.2.1** *Se la matrice  $A = (a_{j,i})$  e il vettore  $b = (b_j)$  per  $(i, j = 1, \dots, m)$  definiscono un metodo RK ad  $m$  stadi per ODE del primo ordine di ordine  $p$ , allora, la corrispondente PVRK formula ha ordine  $p$ .*

Questo importante risultato rende la costruzione dei metodi PVRK relativamente più semplice di quella dei BVRK, infatti per costruire metodi PVRK di ordine locale  $p$  con array di Butcher :

$$\begin{array}{c|c} \mathbf{c} & \mathbf{A} \\ \hline & b^T \end{array}$$

basta considerare il metodo RK di ordine  $p$  per ODEs avente lo stesso array di Butcher. Questo metodo RK sarà detto *metodo RK associato al metodo VRK*, tale metodo giocherà un ruolo importante nello studio della analisi di stabilità per i metodi VRK.

Consideriamo il metodo BVRK (2.14):

$$\left\{ \begin{array}{l} Y_j^{(n)} = \tilde{F}_n(t_n + c_j h) + h \sum_{i=1}^m a_{j,i} K(t_n + d_i h, t_n + c_i h, Y_i^{(n)}) \\ \hspace{15em} (j = 1, \dots, m) \\ y_{n+1} = \tilde{F}_n(t_n + h) + h \sum_{j=1}^m b_j K(t_n + d_j h, t_n + c_j h, Y_j^{(n)}) \\ \hspace{15em} (n = 0, \dots, N - 1) \end{array} \right.$$

Riguardo a tali metodi, possiamo riportare alcuni risultati noti che ci aiuteranno nella scelta dei parametri per la determinazione di famiglie di metodi di ordine  $p \leq 4$  per i metodi BVRK dato che obiettivo della tesi è determinare metodi  $V_0$ -stabili di ordine  $p \leq 4$ :

**Teorema 2.2.2** *Non esiste nessuna BVRK formula a 2 stadi di ordine  $p=3$ .*

DIM. Supponiamo per assurdo che  $m=2$  e  $p=3$ , e consideriamo le condizioni 1.,3. e 6.:

$$b_1 + b_2 = 1, \quad b_1 c_1 + b_2 c_2 = 1/2, \quad b_1 c_1^2 + b_2 c_2^2 = 1/3$$

queste condizioni indicano che la formula di quadratura ha ordine tre. Dal momento che nessuna formula di quadratura esiste di ordine tre con una sola valutazione di funzione si deve avere:

$$c_1 \neq c_2, \quad b_1 \neq 0 \quad b_2 \neq 0$$

Sottraendo la 1. dalla 2. e la 3. dalla 5. si ottiene:

$$b_1(d_1 - 1) + b_2(d_2 - 1) = 0; \quad b_1 c_1(d_1 - 1) + b_2 c_2(d_2 - 1) = 0$$

per quanto affermato precedentemente, questo si ottiene solo se  $d_1 = d_2 = 1$  per cui dalla condizione 7. si ottiene:

$$b_1(a_{1,1}d_1 + a_{1,2}d_2) + b_2(a_{2,1}d_1 + a_{2,2}d_2) = b_1(a_{1,1} + a_{1,2}) + b_2(a_{2,1} + a_{2,2}) = \frac{1}{3}$$

Poichè vale la (2.20)( $a_{i,1} + a_{i,2} = c_i \quad (i = 1, 2)$ ), si ottiene una contraddizione con la condizione 3. che afferma che  $b_1 c_1 + b_2 c_2 = \frac{1}{2}$ .  $\square$

**Lemma 2.2.3** *Se una BVRK formula ha ordine  $p \geq 3$ , allora  $d_i \neq 1$  per almeno un valore di  $i \in \{1, \dots, m\}$ .*

DIM. Supponiamo che per  $p \geq 3$  tutti i  $d_i = 1$  per  $i = 1, \dots, m$ . usando la row sum condition (2.20) e la condizione d'ordine 7. si ottiene:

$$\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^m b_i a_{i,j} d_j = \sum_{i=1}^m b_i \sum_{j=1}^m a_{i,j} = \sum_{i=1}^m b_i c_i = \frac{1}{3}$$

Questo contraddice la condizione 3.  $\square$

**Lemma 2.2.4** *Se una BVRK formula a 3 stadi ha ordine  $p = 3$ , allora:*

$$b_i(d_i - 1) = 0 \quad (i = 1, 2, 3)$$

DIM. Sottraendo la 1. dalla 2., si ha:

$$b_1(d_1 - 1) + b_2(d_2 - 1) + b_3(d_3 - 1) = 0$$

sottraendo la 3. dalla 5. si ha:

$$b_1c_1(d_1 - 1) + b_2c_2(d_2 - 1) + b_3c_3(d_3 - 1) = 0$$

sottraendo la 2. dalla 4. si ha:

$$b_1d_1(d_1 - 1) + b_2d_2(d_2 - 1) + b_3d_3(d_3 - 1) = 0$$

In forma matriciale si ha:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ c_1 & c_2 & c_3 \\ d_1 & d_2 & d_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_1(d_1 - 1) \\ b_2(d_2 - 1) \\ b_3(d_3 - 1) \end{pmatrix} = 0$$

Supponiamo, per assurdo, che esista un  $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)^T \neq 0$ , tale che:

$$(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ c_1 & c_2 & c_3 \\ d_1 & d_2 & d_3 \end{pmatrix} = 0$$

cioè:

$$\alpha_1 + \alpha_2c_i + \alpha_3d_i = 0 \quad i = 1, 2, 3$$

Moltiplicando per  $b_i$  e considerando la somma su  $i$  si ha:

$$\alpha_1 \sum_{i=1}^3 b_i + \alpha_2 \sum_{i=1}^3 b_i c_i + \alpha_3 \sum_{i=1}^3 b_i d_i = 0$$

Poichè:

$$\sum_{i=1}^m b_i = 1; \quad \sum_{i=1}^m b_i c_i = \frac{1}{2}, \quad \sum_{i=1}^m b_i d_i = 1$$

Si ottiene:

$$\alpha_1 + \frac{\alpha_2}{2} + \alpha_3 = 0$$

Moltiplicando per  $b_i c_i$  e sommando su  $i$  si ha:

$$\alpha_1 \sum_{i=1}^3 b_i c_i + \alpha_2 \sum_{i=1}^3 b_i c_i^2 + \alpha_3 \sum_{i=1}^3 b_i d_i c_i = 0$$

Poichè:

$$\sum_{i=1}^m b_i c_i = \frac{1}{2}; \quad \sum_{i=1}^m b_i c_i^2 = \frac{1}{3}, \quad \sum_{i=1}^m b_i d_i c_i = \frac{1}{2}$$

Si ottiene:

$$\frac{\alpha_1}{2} + \frac{\alpha_2}{3} + \frac{\alpha_3}{2} = 0$$

Allora, considerando le due equazioni precedentemente ottenute:

$$\alpha_1 + \frac{\alpha_2}{2} + \alpha_3 = 0$$

$$\frac{\alpha_1}{2} + \frac{\alpha_2}{3} + \frac{\alpha_3}{2} = 0$$

Moltiplicando la seconda per due si ha:

$$\alpha_1 + \alpha_2 \frac{2}{3} + \alpha_3 = 0$$

Confrontata quest'ultima equazione con la prima si ha:

$$\alpha_2 = 0 \quad \alpha_1 + \alpha_3 = 0$$

Per cui:

$$\alpha_1 = -\alpha_3$$

Considerando l'equazione:

$$\alpha_1 + \alpha_2 c_i + \alpha_3 d_i = 0 \quad i = 1, 2, 3$$

si ottiene:

$$\alpha_3(d_i - 1) = 0 \quad i = 1, 2, 3$$

Ma almeno un  $d_i$  è diverso da zero per il lemma precedente, allora,  $\alpha_3 = 0$ , ciò implica che tutti gli  $\alpha_i$  sono nulli, cioè un assurdo.  $\square$

E' importante sottolineare che in questa tesi noi lavoriamo con i metodi VRK di tipo extended. Per tali metodi si ha il seguente corollario:

**Corollario 2.2.5** *Se la VRK formula di un metodo VRK extended è consistente di ordine  $p$ , allora il lag term del metodo è anche di ordine  $p$*

Da tale, importante corollario si evince che, nel caso di metodo VRK di tipo extended, parlare di ordine del metodo VRK o di ordine della VRK formula è equivalente.

Consideriamo il metodo VRK Natural Continuous Extension (2.21):

$$Y_i^{(n)} = F_n(t_{n-1} + \theta_i h) + h \sum_{j=1}^{\mu} \alpha_{ij} k(t_{n-1} + d_{ij} h, t_{n-1} + e_{ij} h, \sum_{l=1}^{\nu} \beta_{ijl} Y_l^{(n)}), \quad (2.21)$$

$$y_n = \sum_{i=1}^{\nu} w_i Y_i^{(n)}$$

per  $i = 1, 2, \dots, \nu$ ,  $n = 1, 2, \dots, N$ , dove:

$$F_n(t) := g(t) + h \sum_{k=1}^{n-1} \sum_{j=1}^m v_j k(t, t_{k-1} + \xi_j h, u(t_{k-1} + \xi_j h)) \quad (2.22)$$

è un'approssimazione del lag term:

$$F(t) := g(t) + \int_0^{t_{n-1}} k(t, s, y(s)) ds$$

per  $t \in (t_{n-1}, t_n]$ ;  $u$  è una Natural Continuous Extension [17] della soluzione numerica definita da:

$$u(t_{k-1} + \theta h) := \sum_{i=1}^{\nu} w_i(\theta) Y_i^{(k)} \quad (\theta \in [0, 1]) \quad (2.23)$$

con  $w_i$  ( $i = 1, \dots, \nu$ ) polinomi dati. Qui,  $\theta_i, \alpha_{ij}, d_{ij}, e_{ij}, \beta_{ijl}, w_i, v_j$  e  $\xi_j$  sono i parametri del metodo. Nel seguito, assumeremo che:

$$\theta_i = \sum_{j=1}^{\mu} \alpha_{ij} \quad e_{ij} = \sum_{l=1}^{\nu} \beta_{ijl} \theta_l, \quad \sum_{l=1}^{\nu} \beta_{ijl} = 1$$

e che sia soddisfatta la *kernel condition*:

$$e_{ij} \leq d_{ij}.$$

Ulteriori condizioni che devono essere imposte su questi parametri per ottenere un ordine richiesto sono date in [17]. Nel seguito della tesi studieremo le proprietà di stabilità di questi metodi.

## 2.3 Teoria della stabilità

Obiettivo della tesi è determinare metodi numerici di ordine  $p > 2$   $V_0$ -stabili. In precedenza abbiamo visto quali sono le condizioni da imporre ai parametri di un metodo numerico PVRK e BVRK affinché esso abbia ordine  $p$ , affrontiamo adesso il problema della stabilità. La teoria qualitativa che descrive la sensibilità della soluzione di una data equazione di Volterra (o di una corrispondente discretizzazione ottenuta con un metodo numerico) per effetto delle perturbazioni dei dati che caratterizzano l'equazione è detta teoria della stabilità. L'obiettivo dei prossimi sottoparagrafi è quello di determinare sotto quali condizioni ed in che misura una soluzione approssimata definita da una particolare discretizzazione della VIE mantiene lo stesso comportamento della soluzione esatta in presenza di perturbazioni, per questo motivo riportiamo alcuni concetti di base della teoria della stabilità per le equazioni integrali di Volterra.

### 2.3.1 Stabilità della soluzione esatta

Consideriamo il sistema di ODEs,

$$\mathbf{y}'(t) = \mathbf{f}(t, \mathbf{y}(t)), \quad 0 \leq t_0 \leq t < \infty$$

dove  $f : R_+ \times D \rightarrow R^m$ , con  $D = \{y \in R^m : \|\mathbf{y}\| < a\}$ , con  $a > 0$  opportuno numero reale, e  $\|\cdot\|$  rappresenta una norma in  $R^m$ . Indichiamo con  $\mathbf{y}(t) := \mathbf{y}(t; t_0, \mathbf{y}_0)$  una soluzione del sistema di ODEs che soddisfa la condizione iniziale  $\mathbf{y}(t_0) = \mathbf{y}_0$ .

**Definizione 2.2** (i) Supponiamo che la soluzione  $\mathbf{y}(t) = \mathbf{y}(t; t_0, \mathbf{y}_0)$  sia definita per  $t_0 \leq t < \infty$ ; (ii) supponiamo che il punto  $(t, \mathbf{y}(t))$  appartenga a  $R_+ \times D$  per tutti  $t \geq t_0$ . Allora  $\mathbf{y}(t)$  è **stabile** (su  $[t_0, \infty)$ ) se:

- esiste un  $\gamma > 0$  tale che ogni soluzione  $\mathbf{y}^*(t) = \mathbf{y}^*(t; t_0, \mathbf{y}_0^*)$  soddisfa la (i) e la (ii) ogni volta che  $\|\mathbf{y}_0 - \mathbf{y}_0^*\| \leq \gamma$ ;
- dato  $\epsilon > 0$ , esiste un  $\delta > 0, 0 < \delta < \gamma$ , tale che:  

$$\|\mathbf{y}_0 - \mathbf{y}_0^*\| \leq \delta \Rightarrow \|\mathbf{y}(t; t_0, \mathbf{y}_0) - \mathbf{y}^*(t; t_0, \mathbf{y}_0^*)\| \leq \epsilon$$

per  $t_0 \leq t < \infty$ . Una soluzione che non è stabile si dirà instabile.

Osserviamo che  $\delta$  dipende da  $\epsilon$  e da  $t_0$ . La definizione si esprime in maniera sintetica dicendo che la soluzione  $\mathbf{y}^*(t) \in [y(t) - \epsilon, y(t) + \epsilon]$  se essa è sufficientemente vicina a  $\mathbf{y}(t_0)$  all'istante  $t = t_0$ ; altre soluzioni possono entrare e uscire da tale intorno  $\forall t \geq t_0$ .

**Definizione 2.3** Consideriamo  $\mathbf{y}(t) = \mathbf{y}(t; t_0, \mathbf{y}_0)$  che soddisfa le condizioni (i), (ii) della Definizione 2.2. Allora  $\mathbf{y}(t)$  è detto essere **uniformemente stabile** (su  $[t_0, \infty)$ ), se, per un dato  $\epsilon > 0$ , esiste un  $\delta > 0$  tale che qualunque soluzione  $\mathbf{z}(t)$  che soddisfa la condizione  $\|\mathbf{y}(t_1) - \mathbf{z}(t_1)\| \leq \delta$  per qualche  $t_1 \geq t_0$  esiste e soddisfa  $\|\mathbf{y}(t) - \mathbf{z}(t)\| \leq \epsilon \quad \forall t \geq t_1$ .

Osserviamo che  $\delta$  non dipende da  $t_1$ . Una volta che la soluzione  $\mathbf{y}^*(t) \in [y(t) - \epsilon, y(t) + \epsilon]$ , rimane in esso  $\forall t \geq t_1$ , in contrasto con il caso dove  $y(t)$  è solo stabile su  $[t_0, \infty)$ .

**Definizione 2.4** Consideriamo  $\mathbf{y}(t) = \mathbf{y}(t; t_0, \mathbf{y}_0)$  che soddisfa le condizioni (i), (ii) della Definizione 2.2. Allora  $\mathbf{y}(t)$  è detto essere **asintoticamente stabile** (su  $[t_0, \infty)$ ), se è stabile su  $[t_0, \infty)$  e se esiste un  $\delta' > 0, 0 < \delta' < \gamma$  tale che

$$\|\mathbf{y}_0 - \mathbf{y}_0^*\| \leq \delta' \Rightarrow \lim_{t \rightarrow \infty} \|\mathbf{y}(t; t_0, \mathbf{y}_0) - \mathbf{y}^*(t; t_0, \mathbf{y}_0^*)\| = 0$$

Altri concetti di stabilità ed approfondimenti si possono trovare in [18, 19, 20]. Osserviamo che se la funzione  $\mathbf{f}$  del sistema di ODEs è continua e le soluzioni sono univocamente determinate dai loro valori iniziali  $\mathbf{y}_0$ , allora le soluzioni dipendono con continuità dai valori iniziali su qualsiasi intervallo finito; la stabilità su  $[t_0, \infty)$  è, allora, equivalente alla stabilità su  $[t_1, \infty)$  per qualsiasi  $t_1 \geq t_0$ .

Il suddetto problema ai valori iniziali è equivalente all'equazione di Volterra:

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{y}_0 + \int_{t_0}^t \mathbf{f}(s, \mathbf{y}(s)) ds, \quad t \geq t_0 \geq 0 \quad (2.24)$$

In generale, un'equazione integrale di Volterra, ha invece del valore iniziale  $\mathbf{y}_0$  la funzione  $\mathbf{g}_0$ , per cui l'equazione si scrive:

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{g}_0(t) + \int_{t_0}^t \mathbf{k}(t, s, \mathbf{y}(s)) ds, \quad t \geq t_0 \geq 0 \quad (2.25)$$

(per rafforzare il legame con la (2.24) cambiamo la notazione cambiando  $\mathbf{g}$  in  $\mathbf{g}_0$ ); studieremo la sensibilità della soluzione della (2.25) considerando perturbazioni della  $\mathbf{g}_0$  sull'intervallo  $[t_0, \infty)$ . Sia:

$$P(R_+) := \{\mathbf{g} \in C(R_+) : \|\mathbf{g}\|_\infty := \sup_{t \in R} \|\mathbf{g}(t)\|\}$$

lo spazio normato delle *ammissibili perturbazioni* per  $\mathbf{g}_0$ , e sia  $\mathbf{k}$  in (2.25) definito in  $S \times D$ , dove  $S := \{(t, s) : t_0 \leq s \leq t < \infty\}$ ,  $D := \{\mathbf{y} \in R^m : \|\mathbf{y}\| < a\}$  per qualche  $a > 0$ , valgono le seguenti definizioni:

**Definizione 2.5** (i) Supponiamo che la soluzione  $\mathbf{y}(t) = \mathbf{y}(t; \mathbf{g}_0)$  della (2.25) corrispondente alla funzione iniziale  $\mathbf{g}_0$  sia definita per tutti  $t \geq t_0$ ; (ii) supponiamo che il punto  $(t, \mathbf{y}(t))$  appartenga a  $R_+ \times D$  per tutti  $t \geq t_0$ . Allora  $\mathbf{y}$  è detta stabile su  $P(R_+)$  (su  $[t_0, \infty)$ ) se:

- esiste un  $\gamma > 0$  tale che ogni soluzione  $\mathbf{y}^*(t) = \mathbf{y}^*(t; \mathbf{g}_0^*)$  corrispondente a  $\mathbf{g}_0^* \in P(R_+)$  soddisfa la (i) e la (ii) ogni volta che  $\|\mathbf{g}_0 - \mathbf{g}_0^*\| \leq \gamma$ ;
- dato  $\epsilon > 0$ , esiste un  $\delta > 0, 0 < \delta < \gamma$ , tale che:  

$$\|\mathbf{g}_0 - \mathbf{g}_0^*\|_\infty \leq \delta \Rightarrow \|\mathbf{y} - \mathbf{y}^*\|_\infty \leq \epsilon$$

Questa soluzione  $\mathbf{y}(t)$  è detta **uniformemente stabile** su  $P(R_+)$  (su  $[t_0, \infty)$ ) se il suddetto  $\delta$  è indipendente da  $t_0$ . E' detta **asintoticamente stabile** su  $P(R_+)$  (su  $[t_0, \infty)$ ) se essa è stabile su  $P(R_+)$  e se, in aggiunta, per ogni  $t_0 \geq 0$  esiste  $\delta' > 0, 0 < \delta' \leq \gamma$ , tale che

$$\|\mathbf{g}_0 - \mathbf{g}_0^*\|_\infty \leq \delta' \Rightarrow \lim_{t \rightarrow \infty} \|\mathbf{y}(t; \mathbf{g}_0) - \mathbf{y}^*(t; \mathbf{g}_0^*)\| = 0$$

In molti importanti casi la soluzione dell'equazione di Volterra si dimostra essere legata alla soluzione del problema a valori iniziali per un sistema di ODEs, cioè:

$$\mathbf{u}'(t) = \mathbf{f}(t, \mathbf{u}(t)), \quad \mathbf{u}(0) = \mathbf{u}_0 \quad (2.26)$$

in cui la funzione al secondo membro dipende dalla funzione iniziale dell'equazione di Volterra.



Vogliamo studiare la stabilità della soluzione  $\mathbf{u}$  della (2.26) rispetto alle perturbazioni sulla funzione  $\mathbf{f}$  al secondo membro. Questa richiesta è molto più forte delle usuali condizioni di stabilità nelle ODEs per le quali si richiede che la soluzione è stabile rispetto a perturbazioni sul vettore iniziale  $\mathbf{u}_0$ . Nonostante ciò è conveniente seguire questo approccio perchè ci permette di ottenere informazioni utili per lo studio della stabilità delle equazioni di Volterra. Il seguente teorema descrive precisamente l'effetto della perturbazione di  $\mathbf{f}$  in (2.26):

**Teorema 2.3.1** *Se  $\mathbf{f}$  e  $\mathbf{f}^*$  sono continue nel dominio di definizione  $D$  e se la seguente disuguaglianza è soddisfatta in  $D$ :*

$$\langle \mathbf{f}(t, \mathbf{v}_1) - \mathbf{f}(t, \mathbf{v}_2), \mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2 \rangle \leq M(t) \|\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2\|_2^2 \quad (2.27)$$

$$\|\mathbf{f}(t, \mathbf{v}) - \mathbf{f}^*(t, \mathbf{v})\|_2 \leq \delta(t). \quad (2.28)$$

*allora le soluzioni esatte  $\mathbf{u}$  e  $\mathbf{u}^*$  corrispondenti rispettivamente alle funzioni  $\mathbf{f}$  ed  $\mathbf{f}^*$ , e ai vettori iniziali  $\mathbf{u}_0$  e  $\mathbf{u}_0^*$  soddisfano la disuguaglianza:*

$$\|\mathbf{u}(t) - \mathbf{u}^*(t)\|_2 \leq \|\mathbf{u}_0 - \mathbf{u}_0^*\| \exp\left(\int_0^t M(\tau) d\tau\right) + \int_0^t \delta(\tau) \exp\left(\int_\tau^t M(s) ds\right) d\tau \quad (2.29)$$

Osserviamo che:  $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle$  rappresenta il prodotto scalare dei vettori  $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ ; la norma  $\|\mathbf{u}\|_2 = \sqrt{\langle \mathbf{u}, \mathbf{u} \rangle}$ . La condizione (2.27) è detta *one-sided Lipschitz condition* e ci permette di ricavare una stima (2.29) meno pessimista (dal momento che  $M(t)$  può essere negativa) della solita stima basata sulla classica costante di Lipschitz della funzione  $\mathbf{f}(t, \mathbf{u})$  [22]. Nel teorema si assume che l'esatta curva soluzione  $(t, \mathbf{u}(t))$  e la curva soluzione perturbata  $(t, \mathbf{u}^*(t))$  restino nel dominio  $D$ . Questo implica che lo spazio delle perturbazioni, presentato nei teoremi di stabilità che si basano sul teorema (2.3.1) è legato al dominio di definizione dell'equazione (2.26). Si potrebbe essere indotti a scegliere il dominio  $D$  quanto più largo è possibile, però se  $\mathbf{f}$  e  $\mathbf{f}^*$  sono non lineari in  $\mathbf{u}$ , la funzione  $M(t)$  assumerà valore tanto più piccolo quanto più piccolo è  $D$ .

Segue dal teorema (2.3.1) che la generica equazione differenziale che soddisfa la condizione (2.26) con funzione  $M(t)$  negativa per  $t \geq t_1$  ha soluzioni che sono stabili

rispetto ad un'arbitraria, limitata perturbazione della funzione  $f$ . Per determinare la funzione  $M(t)$  introduciamo la seguente misura della matrice  $A$ :

**Definizione 2.6** *Sia  $\|\cdot\|$  una qualunque norma. Allora:*

$$\mu(A) := \lim_{h \downarrow 0} \frac{\|I + hA\| - I}{h}$$

*è detta norma logaritmica dlla matrice  $A$  (rispetto alla data norma).*

Usando il concetto di norma logaritmica e considerando che  $\mu_p(A)$  è la norma logaritmica di  $A$  corrispondete alla  $\|\cdot\|_p$ , si enuncia il seguente teorema:

**Teorema 2.3.2** (a) *Se  $\mathbf{f}(t, \mathbf{u}) := A\mathbf{u}$ , con  $A$  matrice costante. Allora  $\mathbf{f}$  soddisfa la one-sided Lipschitz condition (2.27) con  $M(t) = \mu_2(A)$ .*

(b) *Se  $\mathbf{f}(t, \mathbf{u})$  è continua e differenziabile rispetto a  $\mathbf{u}$  per tutti i  $(t, \mathbf{u}) \in D$ . Allora  $\mathbf{f}$  soddisfa la one-sided Lipschitz condition (2.27) in  $D$  con  $M(t) = \sup_D \mu_2(\frac{\partial \mathbf{f}(t, \mathbf{u})}{\partial \mathbf{u}})$ .*

(c) *Le espressioni per  $M(t)$  in (a) e (b) sono ottimali rispetto al dominio di definizione  $D$  di  $\mathbf{f}$ .*

**Corollario 2.3.3** *Sia  $\mathbf{f}(t, \mathbf{u})$  continua e differenziabile rispetto a  $\mathbf{u}$  su  $D$ , se  $\mathbf{f}$  soddisfa la condizione (2.28) su  $D$  con  $|\delta(t)| \leq \bar{\delta}$ , allora*

$$\|\mathbf{u}(t) - \mathbf{u}^*(t)\|_2 \leq e^{Lt} \|\mathbf{u}_0 - \mathbf{u}_0^*\|_2 + \frac{\bar{\delta}}{L} (e^{Lt} - 1),$$

dove  $L$  è la one-sided Lipschitz constant definita da:

$$L := \frac{1}{2} \sup_D \max_j \alpha_j \left( \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{u}}(t, \mathbf{u}) + \frac{\partial \mathbf{f}^T}{\partial \mathbf{u}}(t, \mathbf{u}) \right)$$

dove  $\alpha_j(A)$  rappresenta il  $j$ -mo autovalore di  $A$ .

Segue dal corollario che si ha la stabilità rispetto a perturbazioni limitate sia del vettore iniziale  $\mathbf{u}_0$  sia della funzione  $\mathbf{f}$  della (2.26) se la costante di Lipschitz  $L$  è negativa. Se  $L = 0$ , allora, abbiamo la stabilità rispetto a perturbazioni di  $\mathbf{f}$  della

forma  $\delta(t) = \epsilon \mathbf{d}(t)$  dove  $\mathbf{d} \in L^1(\mathbb{R}_+)$  e dove  $\epsilon$  è un parametro di perturbazione. Tali perturbazioni saranno chiamate *perturbazioni integrabili*.

In seguito consideriamo solo equazioni scalari in quanto l'estensione a sistemi di equazioni di Volterra è semplice. Consideriamo l'equazione integrale di Volterra nella seguente forma:

$$\theta y(t) = g_0(t) + \int_0^t K(t, s, y(s)) ds \quad (2.30)$$

dove per  $\theta = 0$  o per  $\theta = 1$  si ha rispettivamente una equazione integrale di Volterra del prima e seconda specie. La funzione  $g_0(t)$  è inserita per indicare esplicitamente che la soluzione dipende dalla funzione iniziale. Una importante classe di equazioni di Volterra, che possono essere ridotte a problemi a valori iniziali per ODEs, hanno i nuclei così detti di *convoluzione polinomiale*:

$$k(t, s, y) = \sum_{i=0}^m \frac{1}{i!} (t-s)^i \phi_i(s, y), \quad m \geq 1 \quad (2.31)$$

Nel caso di nuclei di convoluzione polinomiale lineare si ha il seguente teorema:

**Teorema 2.3.4** *Sia  $k$  della forma (2.31) con  $\phi_i = i! c_i y$  e sia :*

$$P(a; \zeta) := a\zeta^{m+1} - \sum_{i=0}^m i! c_i \zeta^{m-i}, \quad c_m \neq 0 \quad (2.32)$$

*La soluzione dell'equazione integrale (2.30) è stabile rispetto a perturbazioni limitate in  $C^{m+1}(\mathbb{R}_+)$  se il polinomio  $P(\theta, \zeta)$  ha tutti gli zeri nel semipiano negativo del piano complesso.*

Il polinomio  $P(\theta, \zeta)$  può essere considerato il polinomio caratteristico associato all'equazione integrale di Volterra. Per lo studio della stabilità del polinomio caratteristico si rimanda al capitolo (3) della tesi.

## 2.3.2 Stabilità dei metodi numerici

Per studiare la stabilità numerica delle VIEs si applica il metodo numerico a determinate classi di equazioni test ottenendo un'equazione alle differenze finite

e si studia sotto quali condizioni la soluzione numerica eredita le stesse proprietà della soluzione esatta della classe di equazioni test considerata. In generale, dunque, applicando un metodo numerico ad una classe di equazioni test si perviene ad un'equazione alle differenze finite del tipo:

$$\sum_{i=0}^{\kappa} M_i \mathbf{y}_{n-i} = \mathbf{w}_n, \quad n \geq \kappa \quad (2.33)$$

con  $M_i$  matrici quadrate non dipendenti da  $n$  e dove  $\mathbf{w}_n$  sono vettori noti. Il vettore soluzione  $\mathbf{y}_n$  ha una o più componenti che rappresentano la soluzione numerica  $\{y_n\}$ ; osserviamo che se gli  $M_i$  sono scalari  $\mathbf{y}_n = y_n$ . Nel caso generico, vettoriale, e' possibile ottenere una relazione di ricorrenza contenente solo  $\{y_n\}$  utilizzando il seguente lemma:

**Lemma 2.3.5** *Se la successione  $\{y_n\}_0^\infty$  soddisfa l'equazione alle differenze non omogenea:*

$$G(E)\mathbf{y}_n = \mathbf{w}_{n+\kappa}, \quad n \geq 0,$$

dove le componenti della matrice costante  $G(z)$  sono polinomi in  $z$  di grado al più  $\kappa$  e dove  $E$  è l'operatore di shift definito come :

$$E\mathbf{y}_n := \mathbf{y}_{n+1}$$

Allora ogni componente di  $\mathbf{y}_n$  soddisfa ancora un'equazione non omogenea con polinomio caratteristico  $\det[G(z)]$ .

DIM. sia  $H(z)$  l'operatore aggiunto di  $G(z)$ :  $H(z) := \text{adj}(G(z))$ , cioè la trasposta della matrice dei cofattori degli elementi di  $G(z)$ . Poichè come è noto  $H(z)G(z) = \det[G(z)]I$ , il lemma si dimostra facilmente.  $\square$

E' importante sottolineare che  $\det[G(z)]I$  e le componenti di  $H(z)$  possono avere fattori comuni, questo comporta che la ricorsione ottenuta è di ordine più alto del necessario e di conseguenza il polinomio caratteristico ha radici non desiderate.

Applicando il lemma (2.3.5), otteniamo la relazione di ricorrenza:

$$C(E)y_n = T_{inh}, \quad C(z) := \det\left[\sum_{i=0}^{\kappa} M_i z^{\kappa-i}\right];$$

dove  $T_{inh}$  rappresenta un termine non omogeneo composto da combinazioni lineari delle componenti del vettore  $\mathbf{w}_n$ .

**Definizione 2.7** Sia  $y_n$  una componente del vettore  $\mathbf{y}_n$  che soddisfa la relazione di ricorrenza (2.33), sia il vettore  $\mathbf{w}_n$  dipendente linearmente da un fissato numero di valori della funzione iniziale  $g_0(t)$  nei punti di rete  $\{t_l\}$ , e definiamo il polinomio caratteristico:

$$C(z) := \det\left[\sum_{i=0}^{\kappa} M_i z^{\kappa-i}\right],$$

associato alla (2.33) (o, equivalentemente, associato al metodo numerico che conduce alla (2.33) ).

- (a)  $\{y_n\}_0^\infty$  è **debolmente stabile** se  $C(z)$  soddisfa la root condition.
- (b)  $\{y_n\}_0^\infty$  è **fortemente stabile** se  $C(z)$  è un polinomio di Schur.

Ricordiamo che vale la seguente definizione:

**Definizione 2.8** • (i) Un polinomio si dice che soddisfa la root condition se tutti i suoi zeri sono interni al cerchio unitario e quelli sulla circonferenza unitaria sono semplici.

Si dice che soddisfa la strong root condition se soddisfa la root condition e 1 è il solo zero appartenente alla circonferenza unitaria.

- (ii) Un polinomio è detto un polinomio di von Neumann semplice se soddisfa la root condition. E' detto un polinomio di Schur se tutti gli zeri sono nel cerchio unitario.

Il polinomio caratteristico  $C(z)$  dipende dal metodo numerico ma anche dai parametri del kernel della classe di equazioni test considerate. Se, ad esempio, il kernel è del tipo  $k(t, s, y) = \xi y$ , allora  $C(z)$  dipenderà da  $h\xi$  (in tal caso lo studio della stabilità numerica si può fare utilizzando le considerazioni fatte per lo studio

della stabilità della ODE  $y' = \xi y$ ). Spesso, nella pratica, è conveniente confrontare i metodi numerici confrontando le loro regioni di stabilità, cioè, l'insieme dei punti dello spazio dei parametri (che prevede sempre il parametro di mesh  $h$ ) in cui il metodo presenta particolari proprietà di stabilità.

**Definizione 2.9** Sia  $C(z)$  il polinomio caratteristico associato alla (2.33) dipendente dal vettore dei parametri  $\mathbf{p}$ . Allora, l'insieme dei punti nel  $\mathbf{p}$ -spazio complesso nel quale  $C(z)$  soddisfa la root condition (è un polinomio di Schur) è detta regione di debole (forte) stabilità del metodo numerico (rispetto alla classe di kernel test considerata).

**Definizione 2.10** Il polinomio caratteristico  $C(z)$  associato alla (2.33) è detto polinomio di stabilità di un determinato metodo numerico se il metodo è debolmente (fortemente) stabile per tutti i  $\mathbf{p}$  che giacciono nella regione di debole (forte) stabilità.

Segue dalla definizione (2.7) che un polinomio caratteristico rappresenta un polinomio di stabilità se il termine non omogeneo nella (2.33)  $\mathbf{w}_n$  dipende linearmente da un fissato numero di valori della funzione  $g_0(t)$  nei punti di rete  $\{t_l\}$ .

La maggior parte degli articoli sullo studio della stabilità dei metodi VRK usano equazioni test che sono legate alle equazioni differenziali in modo da poter ricondurre il metodo VRK ad un'equazione alle differenze finite.

Consideriamo la classe di equazioni test con kernel di convoluzione lineare del tipo:

$$k(t, s, y) = [\xi + \eta(t - s)]y \quad (2.34)$$

con  $\xi, \eta$  parametri reali.

La famiglia a due parametri di equazioni integrali di Volterra del secondo ordine con kernel (2.34) è detta **equazione test di convoluzione**:

$$y(t) = g_0(t) + \int_0^t [\xi + \eta(t - s)]y(s)ds \quad (t \geq 0) \quad (2.35)$$

Nel caso particolare in cui  $g_0(t) = 1$  l'equazione (2.35) assume la forma:

$$y(t) = 1 + \int_0^t [\xi + \eta(t - s)]y(s)ds \quad (t \geq 0) \quad (2.36)$$

Nel seguito studieremo la stabilità numerica dei metodi trattati in questa tesi rispetto all'equazione test (2.36). Osserviamo che l'equazione integrale (2.36) è equivalente al problema ai valori iniziali del secondo ordine:

$$y''(t) = \xi y'(t) + \eta y(t), \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = \xi \quad (2.37)$$

L'esatta soluzione della (2.36) può essere scritta nella forma:

$$y(t) = \frac{r_1}{r_1 - r_2} e^{(r_1 t)} + \frac{r_2}{r_2 - r_1} e^{(r_2 t)} \quad (r_1 \neq r_2) \quad (2.38)$$

dove:

$$r_{1,2} := \frac{(\xi \pm \sqrt{D(\xi, \eta)})}{2} \quad \text{con} \quad D = D(\xi, \eta) := \xi^2 + 4\eta$$

Se  $D < 0$  (con  $\xi < 0$ ,  $\eta \leq 0$ ) la soluzione esatta è oscillatoria (con periodo  $4\pi/\sqrt{-D}$ ) ed esponenzialmente smorzata; per  $\xi = 0$ ,  $\eta < 0$  otteniamo  $y(t) = \cos(t\sqrt{-\eta})$ . Inoltre, se  $D > 0$  ( $\xi < 0$ ,  $\eta \leq 0$ ) allora i coefficienti di (2.38) hanno segni opposti e quindi  $y(t)$  ha un solo cambio di segno per qualche  $t > 0$  e soddisfa  $y(t) \rightarrow 0$  per  $t \rightarrow \infty$  [7]. Quindi per  $\xi < 0$  e  $\eta \leq 0$  si ha che  $y(t) \rightarrow 0$  per  $t \rightarrow \infty$ .

Consideriamo il kernel (2.34), nel caso speciale in cui  $\eta = 0$  otteniamo il kernel detto kernel test di base. La relazione di ricorrenza che si ottiene applicando un metodo VRK a tale equazione è:

$$y_{n+1} = V(h\xi)\tilde{F}_n(t_n) + T_{inh}$$

dove il termine  $T_{inh}$  rappresenta un termine non omogeneo costituito da fissate combinazioni lineari di valori di  $g_0(t)$ . Inoltre,  $V(h\xi)$  è una funzione razionale di  $h\xi$  con coefficienti funzione dei parametri del metodo VRK. Nel caso di metodi di tipo extended nei quali  $y_n = \tilde{F}_n(t_n)$  [9], si ha la relazione di ricorrenza:

$$y_{n+1} = V(h\xi)y_n + T_{inh}$$

che coincide con la relazione di ricorrenza per il metodo di tipo Runge-Kutta per ODEs.

Consideriamo il kernel di convoluzione (2.34) e determiniamo il polinomio caratteristico per i metodi VRK studiati in questa tesi (polinomi caratteristici per alcuni

metodi VRK con kernel di convoluzione polinomiale più generali (2.31) si possono trovare in [23]).

Applicando un metodo VRK (2.5)  $\gamma$ -modified (2.8) dove  $\tilde{F}_n(t)$  è del tipo (2.9) al caso di kernel di convoluzione (2.34), otteniamo la relazione di ricorrenza:

$$Y_{n,j} = \gamma_j y_n + (1 - \gamma_j) \tilde{I}_n + g_0(t_n + \theta_j h) - \gamma_j g_0(t_n) + h\eta\theta_j \tilde{J}_n + h \sum_{i=1}^m a_{j,i} [\xi + d_{j,i} h\eta - c_i h\eta] Y_{n,i} \quad (2.39)$$

dove

$$\tilde{J}_n := h \sum_{l=-1}^{n-1} \sum_{j=1}^{m+1} w_{n,l,j} Y_{l,j}, \quad \tilde{I}_n (= \tilde{I}(t_n)) := \tilde{F}_n(t_n) - g_0(t_n).$$

In forma matriciale si ottiene:

$$\mathbf{Y}_n = \gamma y_n + (\mathbf{e} - \gamma) \tilde{I}_n + h\eta\theta \tilde{J}_n + [h\xi A + h^2\eta A_1] \mathbf{Y}_n + \mathbf{G}_n \quad (2.40)$$

dove:

$$\begin{aligned} \gamma &:= (\gamma_1, \dots, \gamma_m)^T, \quad \mathbf{e} := (1, \dots, 1)^T, \quad \theta = (\theta_1, \dots, \theta_m)^T \\ A &:= (a_{j,i}), \quad A_1 := (a_{j,i}(d_{j,i} - c_i)), \\ \mathbf{G}_n &:= (G_j) \quad G_j := g_0(t_n + \theta_j h) - \gamma_j g_0(t_n). \end{aligned} \quad (2.41)$$

introducendo la matrice:

$$M = [I - h\xi A - h^2\eta A_1] \quad (2.42)$$

e assumendo che essa sia non singolare, si ottiene la relazione:

$$\mathbf{Y}_n = M^{-1}[\gamma y_n + (\mathbf{e} - \gamma) \tilde{I}_n + h\eta\theta \tilde{J}_n + \mathbf{G}_n] \quad (2.43)$$

La soluzione numerica  $y_{n+1}$ , data dalla (2.4), può essere scritta nella forma:

$$y_{n+1} = \gamma_{m+1} y_n + (1 - \gamma_{m+1}) \tilde{I}_n + g_0(t_{n+1}) - \gamma_{m+1} g_0(t_n) + h\eta \tilde{J}_n + h\xi < \mathbf{b}, \mathbf{Y}_n > + h^2\eta < \mathbf{b}_1, \mathbf{Y}_n > \quad (2.44)$$

con



$$\gamma_{m+1} := \gamma(t_{n+1}), \quad \mathbf{b}_1 := (b_j(e_j - c_j)).$$

Sostituendo (2.43) in (2.44) otteniamo:

$$y_{n+1} = U y_n + V \tilde{I}_n + h \eta W \tilde{J}_n + T_{inh} \quad (2.45)$$

dove:

$$\begin{aligned} \mathbf{v} &= \xi \mathbf{b} + h \eta \mathbf{b}_1 \\ U &= \gamma_{m+1} + h < \mathbf{v}, M^{-1} \gamma > \\ V &= 1 - \gamma_{m+1} + h < \mathbf{v}, M^{-1}(\mathbf{e} - \gamma) > \\ W &= 1 + h < \mathbf{v}, M^{-1} \theta > \end{aligned} \quad (2.46)$$

Il termine non omogeneo  $T_{inh}$  rappresenta una combinazione lineare di valori di  $g_0(t)$ . Le quantità  $U, V, W$  sono funzioni di  $(h\xi, h^2\eta)$  e sono completamente determinate dai parametri del metodo VRK e dalla funzione  $\gamma(t)$ . Usando il seguente lemma :

**Lemma 2.3.6** *Sia  $M$  una matrice non singolare  $m \times m$  e  $\mathbf{p}, \mathbf{q}$  vettori  $m$  dimensionali. Allora:*

$$1 + < \mathbf{p}, M^{-1} \mathbf{q} > = \frac{\det(M + \mathbf{q} \mathbf{p}^T)}{\det(M)}$$

dove  $\mathbf{q} \mathbf{p}^T$  indica la matrice prodotto del vettore colonna  $\mathbf{q}$  e della vettore riga  $\mathbf{p}^T$ .

E' possibile ottenere una rappresentazione delle funzioni  $U, V, W$  senza l'inversa della matrice  $M$ :

$$\begin{aligned} U &= \gamma_{m+1} + \frac{\det(M + h \gamma \cdot (\mathbf{v}^T / \gamma_{m+1}))}{\det(M)}, & \gamma_{m+1} &\neq 0, \\ V &= (1 - \gamma_{m+1}) + \frac{\det(M + h(\mathbf{e} - \gamma) \cdot (\mathbf{v}^T / (1 - \gamma_{m+1})))}{\det(M)}, & \gamma_{m+1} &\neq 1, \\ W &= 1 + \frac{\det(M + h \theta \cdot \mathbf{v}^T)}{\det(M)} \end{aligned} \quad (2.47)$$

La relazione di ricorrenza (2.45) indica la dipendenza di  $y_{n+1}$  dal termine  $\tilde{I}_n$ , dal termine di quadratura  $\tilde{J}_n$  e da  $y_n$ ; è possibile, utilizzando il lemma (2.3.5), ricavare relazioni di ricorrenza anche per  $\tilde{I}_n$  e per  $\tilde{J}_n$  scegliendo speciali strutture per i pesi  $w_{n,l,j}$  ottenendo una relazione di ricorrenza solo in termini di  $y_n$ .

### Equazione Test Base

Consideriamo il kernel (2.34) nel caso dell'equazione test di base ( $\eta = 0$ ), la relazione di ricorrenza (2.45) si riduce a :

$$\begin{cases} y_{n+1} = Uy_n + V\tilde{I}_n + T_{inh} \\ U := \gamma_{m+1} + h\xi \langle \mathbf{b}, (I - h\xi A)^{-1} \gamma \rangle \\ V := 1 - \gamma_{m+1} + h\xi \langle \mathbf{b}, (I - h\xi A)^{-1} (\mathbf{e} - \gamma) \rangle \end{cases} \quad (2.48)$$

Un' utile osservazione è che, per la stessa approssimazione del lag term, nel caso dell'equazione test di base, la ricorsione dipende solo dalla matrice  $A$  e dal vettore  $\mathbf{b}$ , per cui la relazione di ricorrenza (2.48) nel caso di PVRK e BVRK risulta la stessa, quindi la differenza di struttura delle due classi di metodi non influenza l'analisi della stabilità.

Valgono i seguenti teoremi:

**Teorema 2.3.7** *Sia  $\gamma(t) \equiv 1$  e applichiamo il metodo VRK con  $k = \xi y$ . Allora, per qualsiasi scelta dei pesi  $\{w_{n,j,l}\}$ , il metodo VRK (2.9),(2.5) si riduce alla relazione di ricorrenza:*

$$y_{n+1} - R(h\xi)y_n = T_{inh} \quad (2.49)$$

dove:

$$R(h\xi) := \frac{\det(I - h\xi A + h\xi \mathbf{e} \cdot \mathbf{b}^T)}{\det(I - h\xi A)}, \quad (2.50)$$

$$T_{inh} = g_0(t_{n+1}) - g_0(t) + h\xi \langle \mathbf{b}, (I - h\xi A)^{-1} \mathbf{G}_n \rangle .$$

DIM. Consideriamo la (2.44) e sostituiamo  $\mathbf{Y}_n$  data dalla (2.43) in essa, otteniamo:

$$\begin{aligned} y_{n+1} &= (\gamma_{m+1} + h \langle \xi \mathbf{b}, M^{-1} \gamma \rangle + h \langle h\eta \mathbf{b}_1, M^{-1} \gamma \rangle) y_n + \\ & (1 - \gamma_{m+1} + h \langle \xi \mathbf{b}, M^{-1} (\mathbf{e} - \gamma) \rangle + h \langle h\eta \mathbf{b}_1, M^{-1} (\mathbf{e} - \gamma) \rangle) \tilde{I}_n + \\ & h\eta (1 + h \langle \xi \mathbf{b}, M^{-1} \theta \rangle + h \langle h\eta \mathbf{b}_1, M^{-1} \theta \rangle) \tilde{J}_n \\ & + g_0(t_n + 1) - \gamma_{m+1} g_0(t_n) + h\xi \langle \mathbf{b}, M^{-1} \mathbf{G}_n \rangle + h^2 \eta \langle \mathbf{b}_1, M^{-1} \mathbf{G}_n \rangle \end{aligned} \quad (2.51)$$

posto:

$$v = \xi \mathbf{b} + h\eta \mathbf{b}_1$$

si ha:

$$\begin{aligned} U &= \gamma_{m+1} + h \langle v, M^{-1} \gamma \rangle \\ V &= 1 - \gamma_{m+1} + h \langle v, M^{-1} (e - \gamma) \rangle \\ W &= 1 + h \langle v, M^{-1} \theta \rangle \\ T_{nih} &= g_0(t_n + 1) - \gamma_{m+1} g_0(t_n) + h \xi \langle b, M^{-1} G_n \rangle + h^2 \eta \langle b_1, M^{-1} G_n \rangle \end{aligned} \quad (2.52)$$

si ottiene:

$$y_{n+1} = U y_n + V \tilde{I}_n + h\eta W \tilde{J}_n + T_{inh}$$

nel caso della equazione test di base ( $\eta = 0$ ), si ha :

$$\begin{aligned} U &= \gamma_{m+1} + h \xi \langle b, M^{-1} \gamma \rangle \\ V &= 1 - \gamma_{m+1} + h \xi \langle b, M^{-1} (e - \gamma) \rangle \\ T_{nih} &= g_0(t_n + 1) - \gamma_{m+1} g_0(t_n) + h \xi \langle b, M^{-1} G_n \rangle \end{aligned} \quad (2.53)$$

Considerando che:

$$M^{-1} = [I - h\xi A]^{-1}$$

e applicando il lemma (2.3.6), si ottiene la (2.49).  $\square$

La relazione di ricorrenza (2.49), (2.50) è dello stesso tipo e con la stessa funzione  $R(h\xi)$  di quella che si ottiene, nella teoria di stabilità delle ODE, applicando il metodo di RK con array di Butcher:

$$\frac{\begin{array}{c|c} c & A \\ \hline & b^T \end{array}}{\quad} \quad (2.54)$$

all'equazione test  $y' = \xi y$  e per tale motivo che sono stati introdotti i metodi VRK  $\gamma$ -modified. La funzione  $R(h\xi)$  gioca un ruolo fondamentale nella seguente analisi:

**Corollario 2.3.8** Sia  $\gamma(t) \equiv 1$  e sia  $k(t, s, y) = \xi y$ . Allora, per qualsiasi scelta dei pesi  $\{w_{n,l,j}\}$ , il polinomio caratteristico è dato da:

$$C(z) = z - R(h\xi) \quad (2.55)$$

ed esso rappresenta il polinomio di stabilità per il metodo VRK.

La funzione  $R(h\xi)$  è identica alla funzione di stabilità del metodo RK (2.54), pertanto il metodo (2.54) sarà detto *metodo RK associato*, la relazione che lega il metodo VRK al metodo RK associato è formulata nel seguente teorema.

**Teorema 2.3.9** Se il metodo RK associato possiede la regione di stabilità  $S^*$ , allora, per qualunque scelta dei pesi  $\{w_{n,l,j}\}$  in (2.9), il metodo  $\gamma$ -modificato VRK con  $\gamma(t) \equiv 1$ , possiede una regione di forte stabilità uguale ad  $S^*$

Nella tesi studiamo i metodi PVRK e BVRK extended cioè i VRK metodi con con lag term del tipo (2.6). Per essi valgono i seguenti teoremi:

**Teorema 2.3.10** Sia  $k(t, s, y) = \xi y$ . Allora, per qualsiasi funzione  $\gamma(t)$ , il metodo VRK extended si riduce alla relazione di ricorrenza (2.49),(2.50).

**Corollario 2.3.11** Consideriamo il metodo VRK di tipo extended e sia  $k(t, s, y) = \xi y$ . Allora, per qualsiasi funzione  $\gamma(t)$ , il polinomio caratteristico è dato da:

$$C(z) = z - R(h\xi) \quad (2.56)$$

e rappresenta il polinomio di stabilità del metodo VRK.

Un teorema analogo al teorema (2.3.9) vale nel caso di metodo VRK extended:

**Teorema 2.3.12** Se il metodo RK associato possiede la regione di stabilità  $S^*$ , allora, per qualunque  $\gamma(t)$ , il metodo VRK extended possiede una regione di forte stabilità uguale ad  $S^*$ .

## Equazione Test di Convoluzione

In questo paragrafo studiamo la stabilità della classe di metodi VRK di tipo extended e Natural Continuous Extension quando essi sono applicati all'equazione di convoluzione (2.36).

In precedenza abbiamo definito la regione di forte stabilità di un metodo numerico, definizione (2.9), come l'insieme dei punti del  $\mathbf{p}$ -spazio complesso nel quale  $C(z)$  è un polinomio di Schur. Nel caso di equazione di convoluzione (2.34) con  $\xi, \eta$  reali, posto  $x = h\xi$  e  $y = h^2\eta$ , la regione di forte stabilità si può ridefinire come:

$$R_f = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : C(z) \text{ è un polinomio di Schur}\}$$

Obiettivo della tesi è determinare metodi numerici di ordine alto e  $V_0$ -stabili. Introduciamo, dunque, la definizione di  $V_0$ -stabilità:

**Definizione 2.11** *Un metodo numerico è detto  $V_0$ -stabile se la sua regione di forte stabilità  $R_f$  include l'insieme:  $\{(x, y) : x < 0 \text{ e } y \leq 0\}$*

Per i metodi VRK extended (2.5), (2.6) enunciamo il seguente teorema:

**Teorema 2.3.13** *Consideriamo il metodo VRK di tipo extended (2.5), (2.6). Allora, nel caso dell'equazione test di convoluzione (2.35), il metodo si riduce (per qualsiasi funzione  $\gamma(t)$ ) alla ricorsione finita:*

$$y_{n+1} - (R + W^*)y_n + (RW^* - h^2\eta R^*W)y_{n-1} = T_{inh}, \quad (2.57)$$

dove  $R := 1 + h < \mathbf{v}, M^{-1}\mathbf{e} >$ ,  $R^* := < \mathbf{b}, M^{-1}\mathbf{e} >$ ,  $W := 1 + h < \mathbf{v}, M^{-1}\theta >$  e  $W^* := 1 + h^2\eta < \mathbf{b}, M^{-1}\theta >$

Utilizzando il lemma (2.3.6) le funzioni  $R, R^*, W$  e  $W^*$  possono essere espresse in termini di  $h\xi$  ed  $h^2\eta$ .

**Corollario 2.3.14** *Consideriamo il kernel  $k(t, s, y) = [\xi + \eta(t - s)]y$ . Allora, per qualsiasi funzione  $\gamma(t)$ , il polinomio caratteristico è dato da:*

$$C(z) = z^2 - (R + W^*)z + RW^* - h^2\eta R^*W \quad (2.58)$$

e rappresenta un polinomio di stabilità del metodo VRK extended.

Nei due esempi che seguono determiniamo il polinomio caratteristico del metodo VRK Natural Continuous Extension (2.21-2.23) e del metodo BVRK (2.14).

Consideriamo il metodo VRK Natural Continuous Extension (2.21-2.23) e appliciamolo all'equazione test di convoluzione (2.36) si genera la soluzione approssimata  $\{y_n\}_{n=0}^\infty$  che dipende da due parametri  $h\xi$  e  $h^2\eta$ .

Ricordiamo la definizione (2.11) e applichiamo il metodo VRK (2.21-2.23) all'equazione test di convoluzione, otteniamo:

$$Y_i^{(n)} = F_n(t_{n-1} + \theta_i h) + h\xi \sum_{l=1}^{\nu} \sum_{j=1}^{\mu} \alpha_{ij} \beta_{ijl} Y_l^{(n)} \quad (2.59)$$

$$h^2\eta \sum_{l=1}^{\nu} \sum_{j=1}^{\mu} \alpha_{ij} d_{ij} \beta_{ijl} Y_l^{(n)} - h^2\eta \sum_{l=1}^{\nu} \sum_{j=1}^{\mu} \alpha_{ij} e_{ij} \beta_{ijl} Y_l^{(n)}$$

$$F_n(t_{n-1} + \theta_i h) = 1 + \sum_{k=1}^{n-1} (h\xi \sum_{p=1}^{\nu} \sum_{j=1}^m v_j \gamma_{jp} Y_p^{(k)} +$$

$$h^2\eta \sum_{p=1}^{\nu} \sum_{j=1}^m (n-k) v_j \gamma_{jp} Y_p^{(k)} + h^2\eta \sum_{p=1}^{\nu} \sum_{j=1}^m v_j (\theta_i - \xi_j) \gamma_{jp} Y_p^{(k)}) \quad (2.60)$$

dove  $\gamma_{jp} := w_p(\xi_j)$ . Posto  $z = h\xi$ ,  $w = h^2\eta$ ,

$$A = [a_{ik}]_{i,k=1}^\nu \quad a_{ik} = \sum_{j=1}^\mu \alpha_{ij} \beta_{ijk},$$

$$B = [b_{ik}]_{i,k=1}^\nu \quad b_{ik} = \sum_{j=1}^\mu \alpha_{ij} d_{ij} \beta_{ijk},$$

$$C = [c_{ik}]_{i,k=1}^\nu \quad c_{ik} = \sum_{j=1}^\mu \alpha_{ij} e_{ij} \beta_{ijk},$$

$$q = [q_1, \dots, q_\nu]^T, \quad q_p = \sum_{j=1}^m v_j \gamma_{jp},$$

$$r = [r_1, \dots, r_\nu]^T, \quad r_p = \sum_{j=1}^m v_j \xi_j \gamma_{jp},$$

$$\theta = [\theta_1, \dots, \theta_\nu]^T, \quad u = [1, 1, \dots, 1]^T,$$

definiamo, inoltre:

$$y^{(n)} = [Y_1^{(n)}, \dots, Y_\nu^{(n)}]^T;$$

$$f_n = [F_n(t_{n-1} + \theta_1 h), F_n(t_{n-1} + \theta_2 h), \dots, F_n(t_{n-1} + \theta_\nu h)]^T$$

In forma matriciale le (2.59), (2.60) divengono:

$$y^{(n)} = f_n + [zA + w(B - C)]y^{(n)}, \quad (2.61)$$

$$f_n = u + \sum_{k=1}^{n-1} [zuq^T + w(n-k)uq^T + w\theta q^T - wur^T]y^{(k)}, \quad (2.62)$$

Partendo dalla (2.61) e (2.62) abbiamo:

$$y^{(n+2)} = f_{n+2} + [zA + w(B - C)]y^{(n+2)}$$

Posto  $Q = I - zA - w(B - C)$  dove  $I$  è la matrice identica, si ottiene:

$$Qy^{(n+2)} = f_{n+2} = u + \sum_{k=1}^{n+1} [zuq^T + w(n+2-k)uq^T + w\theta q^T - wur^T]y^{(k)}$$

Sviluppando i calcoli si ottiene la relazione:

$$Qy^{(n+2)} = [2Q + (z+w)uq^T + w\theta q^T - wur^T]y^{(n+1)} - (Q + zuq^T + w\theta q^T - wur^T)y^{(n)} \quad (2.63)$$

per  $n = 1, 2, \dots, N$ .

Cerchiamo soluzioni del tipo:

$$y^{(n)} = \alpha_n a + \beta_n b,$$

dove  $a = Q^{-1}u$ ,  $b = Q^{-1}\theta$ , nell'ipotesi che  $Q$  sia non singolare, con  $\alpha_n, \beta_n$  scalari da determinare.

Sostituendo  $y^{(n)} = \alpha_n a + \beta_n b$ , nella (2.63), si ottiene:

$$\begin{aligned} Q\alpha_{n+2} + Q\beta_{n+2} &= 2Q\alpha_{n+1}a + 2Q\beta_{n+1}b + (z+w)uq^T\alpha_{n+1}a + (z+w)uq^T\beta_{n+1}b \\ &+ w\theta q^T\alpha_{n+1}a + w\theta q^T\beta_{n+1}b - wur^T\alpha_{n+1}a - wur^T\beta_{n+1}b - Q\alpha_n a - Q\beta_n b \\ &- zuq^T\alpha_n a - zuq^T\beta_n b - w\theta q^T\alpha_n a - w\theta q^T\beta_n b + wur^T\alpha_n a + wur^T\beta_n b \end{aligned}$$

Per il principio di indentità dei polinomi, uguagliando rispetto a  $Qa$ ,  $Qb$ , si ha:

$$\begin{aligned} \alpha_{n+2} &= (2 + (z+w)q^T a - wr^T a)\alpha_{n+1} + ((z+w)q^T b - wr^T b)\beta_{n+1} - (1 + zq^T a - wr^T a)\alpha_n \\ &\quad - (zq^T b - wr^T b)\beta_n \\ \beta_{n+2} &= wq^T a\alpha_{n+1} + (2 + wq^T b)\beta_{n+1} - wq^T a\alpha_n - (1 + wq^T b)\beta_n \end{aligned}$$

Posto:



$$M = \begin{bmatrix} (2 + (z + w)q^T a - wr^T a) & (z + w)q^T b - wr^T b \\ wq^T a & 2 + wq^T b \end{bmatrix}$$

$$N = \begin{bmatrix} -(1 + zq^T a - wr^T a) & -(zq^T b - wr^T b) \\ -wq^T a & -(1 + wq^T b) \end{bmatrix}$$

Si ottiene la relazione di ricorrenza:

$$v_{n+1} = Sv_n$$

Dove:

$$S = \begin{bmatrix} M & N \\ I & 0 \end{bmatrix}$$

$$v_1 = [\alpha_2, \beta_2, \alpha_1, \beta_1]^T$$

Calcoliamo i valori di starting:  $y^{(1)}, y^{(2)}$ :

$$y^{(1)} = Q^{-1}f_1 = a$$

$$y^{(2)} = Q^{-1}f_2 = [1 + (z + w)q^T a - wr^T a]a + wq^T ab$$

Considerando che:

$$y^{(1)} = \alpha_1 a + \beta_1 b, \quad y^{(2)} = \alpha_2 a + \beta_2 b$$

si ottiene:

$$\alpha_1 = 1, \quad \beta_1 = 0, \quad \alpha_2 = 1 + (z + w)q^T a - wr^T a \quad \beta_2 = wq^T a$$

Il polinomio caratteristico della matrice di stabilità S è :

$$\phi(\theta) = \det(\theta^2 I - \theta M - N) \tag{2.64}$$

Sviluppando si ottiene:

$$\phi(\theta) = (\theta - 1)^2 \psi(\theta)$$

Con:

$$\psi(\theta) = \theta^2 - (2 + (z+w)q^T a + w(q^T b - r^T a))\theta + (1 + zq^T a + w(q^T b - r^T a) + w^2(q^T a r^T b - q^T b r^T a)) \quad (2.65)$$

Nel seguito riportiamo i calcoli effettuati per determinare il polinomio di stabilità del metodo VRK extended di tipo Bel'tyukov (2.14) quando esso è applicato all'equazione test di convoluzione (2.36), con calcoli analoghi si determina il polinomio di stabilità per i metodi PVRK (2.12).

Consideriamo il metodo BVRK extended (2.14):

$$\left\{ \begin{array}{l} Y_j^{(n)} = \tilde{F}_n(t_n + c_j h) + h \sum_{i=1}^m a_{j,i} k(t_n + d_i h, t_n + c_i h, Y_i^{(n)}) \\ \qquad \qquad \qquad (j = 1, \dots, m) \\ y_{n+1} = \tilde{F}_n(t_n + h) + h \sum_{j=1}^m b_j k(t_n + d_j h, t_n + c_j h, Y_j^{(n)}) \\ \qquad \qquad \qquad (n = 0, \dots, N-1) \end{array} \right. \quad (2.66)$$

$$\tilde{F}_n(t) := g(t) + h \sum_{l=0}^{n-1} \sum_{i=1}^m b_i k(t + (d_i - 1)h, t_l + c_i h, Y_i^{(l)})$$

Consideriamo  $\tilde{F}_n(t)$  calcolata nei punti  $t_n + c_j h$  e  $t_n + h$ :

$$\tilde{F}_n(t)(t_n + c_j h) = g(t_n + c_j h) + h \sum_{l=0}^{n-1} \sum_{i=1}^m b_i k(t_n + c_j h + (d_i - 1)h, t_l + c_i h, Y_i^{(l)}) =$$

$$= g(t_n + c_j h) + h \sum_{l=0}^{n-1} \sum_{i=1}^m b_i k(t_n + (c_j + d_i - 1)h, t_l + c_i h, Y_i^{(l)})$$

$$\tilde{F}_n(t)(t_n + h) = g(t_n + h) + h \sum_{l=0}^{n-1} \sum_{i=1}^m b_i k(t_n + h + (d_i - 1)h, t_l + c_i h, Y_i^{(l)}) =$$

$$g(t_n + h) + h \sum_{l=0}^{n-1} \sum_{i=1}^m b_i k(t_n + d_i h, t_l + c_i h, Y_i^{(l)})$$

Sostituendo in (2.66), si ottiene:

$$\left\{ \begin{array}{l} Y_j^{(n)} = g(t_n + c_j h) + h \sum_{l=0}^{n-1} \sum_{i=1}^m b_i k(t_n + (c_j + d_i - 1)h, t_l + c_i h, Y_i^{(l)}) \\ \quad + h \sum_{i=1}^m a_{ji} k(t_n + d_i h, t_n + c_i h, Y_i^{(n)}) \\ y_{n+1} = g(t_n + h) + h \sum_{l=0}^{n-1} \sum_{i=1}^m b_i k(t_n + d_i h, t_l + c_i h, Y_i^{(l)}) \\ \quad + h \sum_{j=1}^m b_j k(t_n + d_j h, t_n + c_j h, Y_j^{(n)}) \end{array} \right.$$

Applichiamo il metodo all'equazione test di convoluzione (2.36) si ha:

$$\begin{aligned} Y_j^{(n)} &= 1 + h \sum_{l=0}^{n-1} \sum_{i=1}^m b_i [\xi + \eta(t_n + (c_j + d_i - 1)h - t_l - c_i h)] Y_i^{(l)} \\ &\quad + h \sum_{i=1}^m a_{ji} [\xi + \eta(t_n + d_i h - t_n - c_i h)] Y_i^{(n)} \end{aligned}$$

Considerato che:  $t_n = nh$  e  $t_l = lh$  si ottiene:

$$\left\{ \begin{array}{l} Y_j^{(n)} = 1 + h\xi \sum_{l=0}^{n-1} \sum_{i=1}^m b_i Y_i^{(l)} + h^2 \eta \sum_{l=0}^{n-1} \sum_{i=1}^m b_i [(n - l - 1) + (c_j + d_i - c_i)] Y_i^{(l)} \\ \quad + h\xi \sum_{i=1}^m a_{ji} Y_i^{(n)} + h^2 \eta \sum_{i=1}^m a_{ji} (d_i - c_i) Y_i^{(n)} \\ y^{(n+1)} = 1 + h\xi \sum_{l=0}^{n-1} \sum_{i=1}^m b_i Y_i^{(l)} + h^2 \eta \sum_{l=0}^{n-1} \sum_{i=1}^m b_i (n - l + d_i - c_i) Y_i^{(l)} + h\xi \sum_{j=1}^m b_j Y_j^{(n)} \\ \quad + h^2 \eta \sum_{j=1}^m b_j (d_j - c_j) Y_j^{(n)} \end{array} \right.$$

Posto  $h\xi = x$  e  $h^2\eta = y$  si ha :

$$\left\{ \begin{array}{l} Y_j^{(n)} = 1 + x \sum_{l=0}^{n-1} \sum_{i=1}^m b_i Y_i^{(l)} + y \sum_{l=0}^{n-1} \sum_{i=1}^m b_i [(n-l-1) + (c_j + d_i - c_i)] Y_i^{(l)} \\ \quad + x \sum_{i=1}^m a_{ji} Y_i^{(n)} + y \sum_{i=1}^m a_{ji} (d_i - c_i) Y_i^{(n)} \\ \\ y^{(n+1)} = 1 + x \sum_{l=0}^{n-1} \sum_{i=1}^m b_i Y_i^{(l)} + y \sum_{l=0}^{n-1} \sum_{i=1}^m b_i (n-l+d_i-c_i) Y_i^{(l)} + x \sum_{j=1}^m b_j Y_j^{(n)} \\ \quad + y \sum_{j=1}^m b_j (d_j - c_j) Y_j^{(n)} \end{array} \right. \quad (2.67)$$

Introducendo la notazione:

$$e = (1, \dots, 1)^T, \in \mathbb{R}^m \quad c = (c_1, \dots, c_m)^T, \in \mathbb{R}^m \quad d = (d_1, \dots, d_m)^T \in \mathbb{R}^m,$$

$$Q = eb^T \in \mathbb{R}^{m \times m}, \quad C = \text{diag}(c) \in \mathbb{R}^{m \times m}, \quad D_C = \text{diag}(d - c) \in \mathbb{R}^{m \times m}$$

L'equazione degli stadi interni può essere scritta in forma compatta:

$$\begin{aligned} Y^{(n)} = e + xQ \sum_{l=0}^{n-1} Y^{(l)} + yQ \sum_{l=0}^{n-1} (n-l-1)Y^{(l)} + yQD_C \sum_{l=0}^{n-1} Y^{(l)} + yCQ \sum_{l=0}^{n-1} Y^{(l)} + xAY^{(n)} \\ + yAD_C Y^{(n)} \end{aligned}$$

Posto  $M = I - xA - yAD_C$  si ha :

$$MY^{(n)} = e + xQ \sum_{l=0}^{n-1} Y^{(l)} + yQ \sum_{l=0}^{n-1} (n-l-1)Y^{(l)} + yQD_C \sum_{l=0}^{n-1} Y^{(l)} + yCQ \sum_{l=0}^{n-1} Y^{(l)}$$

Passiamo da  $n$  ad  $n+1$  otteniamo :

$$MY^{(n+1)} = e + xQ \sum_{l=0}^n Y^{(l)} + yQ \sum_{l=0}^n (n+1-l-1)Y^{(l)} + yQD_C \sum_{l=0}^n Y^{(l)} + yCQ \sum_{l=0}^n Y^{(l)}$$

$$MY^{(n+1)} = e + xQ \sum_{l=0}^{n-1} Y^{(l)} + xQY^{(n)} + yQ \sum_{l=0}^{n-1} (n-l-1)Y^{(l)} + yQ \sum_{l=0}^n Y^{(l)} - yQY^{(n)}$$

$$+ yQD_C \sum_{l=0}^{n-1} Y^{(l)} + yQD_C Y^{(n)} + yCQ \sum_{l=0}^{n-1} Y^{(l)} + yCQY^{(n)}$$

$$MY^{(n+1)} = (e + xQ \sum_{l=0}^{n-1} Y^{(l)} + yQ \sum_{l=0}^{n-1} (n-l-1)Y^{(l)} + yQD_C \sum_{l=0}^{n-1} Y^{(l)} + yCQ \sum_{l=0}^{n-1} Y^{(l)})$$

$$+ xQY^{(n)} + yQ \sum_{l=0}^n Y^{(l)} - yQY^{(n)} + yQD_C Y^{(n)} + yCQY^{(n)}$$

$$MY^{(n+1)} = MY^{(n)} + xQY^{(n)} + yQD_C Y^{(n)} + yCQY^{(n)} - yQY^{(n)} + yQ \sum_{l=0}^n Y^{(l)} \quad (2.68)$$

Dove abbiamo considerato che:

$$\sum_{l=0}^n (n+1-l-1)Y^{(l)} = \sum_{l=0}^{n-1} (n-l-1)Y^{(l)} + \sum_{l=0}^n Y^{(l)} - Y^{(n)}$$

La relazione può anche essere definita come relazione tra  $Y^{(n+2)}$ ,  $Y^{(n+1)}$  e  $Y^{(n+1)}$ ,  $Y^{(n)}$ .

Per ottenere tale relazione consideriamo l'equazione precedentemente definita (2.68):

$$MY^{(n+1)} = MY^{(n)} + xQY^{(n)} + yQD_C Y^{(n)} + yCQY^{(n)} + yQ \sum_{l=0}^n Y^{(l)} - yQY^{(n)}$$

Considerato che:

$$+yQ \sum_{l=0}^n Y^{(l)} - yQY^{(n)} = yQ \sum_{l=0}^{n-1} Y^{(l)}$$

abbiamo:

$$MY^{(n+1)} = MY^{(n)} + xQY^{(n)} + yQD_C Y^{(n)} + yCQY^{(n)} + yQ \sum_{l=0}^{n-1} Y^{(l)}$$

$$MY^{(n+1)} = (M + xQ + yQD_C + yCQ)Y^{(n)} + yQ \sum_{l=0}^{n-1} Y^{(l)}$$

Passando da  $n + 1$  ad  $n + 2$  si ha:

$$MY^{(n+2)} = (M + xQ + yQD_C + yCQ)Y^{(n+1)} + yQ \sum_{l=0}^{n-1} Y^{(l)} + yQY^{(n)}$$

Sommando e sottraendo la quantità  $(M + xQ + yQD_C + yCQ)Y^{(n)}$  a secondo membro si ottiene:

$$MY^{(n+2)} = (M + xQ + yQD_C + yCQ)Y^{(n+1)} + yQ \sum_{l=0}^{n-1} Y^{(l)} + yQY^{(n)} +$$

$$+(M + xQ + yQD_C + yCQ)Y^{(n)} - (M + xQ + yQD_C + yCQ)Y^{(n)}$$

$$MY^{(n+2)} = (M+xQ+yQD_C+yCQ)Y^{(n+1)}+yQY^{(n)}+(M+xQ+yQD_C+yCQ)Y^{(n)}$$

$$+yQ \sum_{l=0}^{n-1} Y^{(l)} - (M + xQ + yQD_C + yCQ)Y^{(n)}$$

$$MY^{(n+2)} = (2M+xQ+yQD_C+yCQ)Y^{(n+1)}+yQY^{(n)}-(M+xQ+yQD_C+yCQ)Y^{(n)} \quad (2.69)$$

Posto  $N = M + xQ + yQD_C + yCQ$  otteniamo la relazione :

$$MY^{(n+2)} = (M + N)Y^{(n+1)} + (yQ - N)Y^{(n)}$$

La relazione che lega  $Y^{(n+2)}, Y^{(n+1)}$  a  $Y^{(n+1)}, Y^{(n)}$  é :

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} M & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Y^{(n+2)} \\ Y^{(n+1)} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} M + N & yQ - N \\ I & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Y^{(n+1)} \\ Y^{(n)} \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} Y^{(n+2)} \\ Y^{(n+1)} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} M^{-1} & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} M + N & yQ - N \\ I & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Y^{(n+1)} \\ Y^{(n)} \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} Y^{(n+2)} \\ Y^{(n+1)} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} M^{-1}(M + N) & M^{-1}(yQ - N) \\ I & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Y^{(n+1)} \\ Y^{(n)} \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} Y^{(n+2)} \\ Y^{(n+1)} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} (I + M^{-1}N) & (yM^{-1}Q - M^{-1}N) \\ I & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Y^{(n+1)} \\ Y^{(n)} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Dove :  $M = I - xA - yAD_C$ ,  $N = M + xQ + y(CQ + QD_C)$

$$M^{-1}N = I + xM^{-1}eb^T + y(M^{-1}Ceb^T + M^{-1}eb^TD_C)$$

$$M^{-1}N = I + xM^{-1}eb^T + y(M^{-1}cb^T + M^{-1}eb^TD_C)$$

Posto:  $a = M^{-1}e$ ,  $v = M^{-1}c$ , si ottiene:

$$M^{-1}N = I + xab^T + y(vb^T + ab^TD_C)$$

Posto, ancora:  $R = I + M^{-1}N$ ,  $S = yM^{-1}Q - M^{-1}N$  si ha:

$$R = 2I + xab^T + y(vb^T + ab^TD_C)$$

$$S = yab^T - I - xab^T - y(vb^T + ab^TD_C)$$

La relazione diviene:

$$\begin{bmatrix} Y^{(n+2)} \\ Y^{(n+1)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R & S \\ I & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Y^{(n+1)} \\ Y^{(n)} \end{bmatrix}$$

Indicando con  $\phi(w)$  il polinomio di stabilità, si ha:

$$\phi(w) = \det(w * I - \begin{pmatrix} R & S \\ I & 0 \end{pmatrix}) = \det(w^2 I - wR - S) \quad (2.70)$$

Allo stesso polinomio si può arrivare partendo dalla relazione (2.69):

$$MY^{(n+2)} = (2M + xQ + yQD_C + yCQ)Y^{(n+1)} + yQY^{(n)} - (M + xQ + yQD_C + yCQ)Y^{(n)}$$

dove  $Q = eb^T$ ,  $C = \text{diag}(c)$ ,  $D_C = \text{diag}(d - c)$ , sostituendo si ottiene:

$$\begin{aligned} MY^{(n+2)} &= (2M + xeb^T + yeb^T \text{diag}(d - c) + y\text{diag}(c)eb^T)Y^{(n+1)} + \\ &\quad yeb^T Y^{(n)} - (M + xeb^T + yeb^T \text{diag}(d - c) + y\text{diag}(c)eb^T)Y^{(n)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} MY^{(n+2)} &= (2M + xeb^T + yeb^T \text{diag}(d - c) + y\text{diag}(c)eb^T)Y^{(n+1)} + \\ &\quad + [-M - (x - y)eb^T - yeb^T \text{diag}(d - c) - y\text{diag}(c)eb^T]Y^{(n)} \end{aligned}$$

Considerando che  $\text{diag}(c)e = c$ , vettore colonna, si ha:

$$\begin{aligned} MY^{(n+2)} &= (2M + xeb^T + yeb^T \text{diag}(d - c) + ycb^T)Y^{(n+1)} + \\ &\quad + [-M - (x - y)eb^T - yeb^T \text{diag}(d - c) - ycb^T]Y^{(n)} \end{aligned} \quad (2.71)$$

Cerchiamo soluzioni della (2.71) del tipo:

$$Y^{(n)} = \alpha_n a + \beta_n b,$$

con  $\alpha_n, \beta_n$  scalari da determinare, sostituendo si ottiene:

$$\begin{aligned} M(\alpha_{n+2}M^{-1}e + \beta_{n+2}M^{-1}c) &= [2M + xeb^T + yeb^T D_C + ycb^T](\alpha_{n+1}M^{-1}e + \beta_{n+1}M^{-1}c) \\ &\quad + [-M - (x - y)eb^T - yeb^T D_C - ycb^T](\alpha_n M^{-1}e + \beta_n M^{-1}c) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (\alpha_{n+2}e + \beta_{n+2}c) &= 2e\alpha_{n+1} + \alpha_{n+1}xeb^T a + \alpha_{n+1}yeb^T D_C a + \alpha_{n+1}ycb^T a \\ &\quad + 2c\beta_{n+1} + \beta_{n+1}xeb^T v + \beta_{n+1}yeb^T D_C v + \beta_{n+1}ycb^T v \end{aligned}$$



$$-\alpha_n e - \alpha_n (x-y) e b^T a - \alpha_n y e b^T D_C a - \alpha_n y c b^T a - \beta_n c - \beta_n (x-y) e b^T v - \beta_n y e b^T D_C v - \beta_n y c b^T v$$

$$\begin{aligned} \alpha_{n+2} e + \beta_{n+2} c &= e[\alpha_{n+1}(2 + x b^T a + y b^T D_C a) + \beta_{n+1}(x b^T v + y b^T D_C v)] + \\ &e[\alpha_n(-1 - (x-y) b^T a - y b^T D_C a) + \beta_n(-(x-y) b^T v - y b^T D_C v)] \\ &c[\alpha_{n+1} y b^T a + \beta_{n+1}(2 + y b^T v)] + c[\alpha_n(-y b^T a) + \beta_n(-1 - y b^T v)] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \alpha_{n+2} &= \alpha_{n+1}(2 + x b^T a + y b^T D_C a) + \beta_{n+1}(x b^T v + y b^T D_C v) - \alpha_n(1 + (x-y) b^T a + y b^T D_C a) \\ &\quad - \beta_n((x-y) b^T v + y b^T D_C v) \\ \beta_{n+2} &= \alpha_{n+1} y b^T a + \beta_{n+1}(2 + y b^T v) - \alpha_n y b^T a - \beta_n(1 + y b^T v) \end{aligned}$$

Posto:

$$\begin{aligned} MM &= \begin{bmatrix} 2 + x b^T a + y b^T D_C a & x b^T v + y b^T D_C v \\ y b^T a & 2 + y b^T v \end{bmatrix} \\ NN &= \begin{bmatrix} -1 - (x-y) b^T a - y b^T D_C a & -(x-y) b^T v - y b^T D_C v \\ -y b^T a & -1 - y b^T v \end{bmatrix} \end{aligned}$$

La matrice di stabilità è:

$$SS = \begin{bmatrix} MM & NN \\ I & 0 \end{bmatrix}$$

Il polinomio di stabilità è:

$$\phi(w) = \det(wI - SS) = \det(wI - \begin{pmatrix} MM & NN \\ I & 0 \end{pmatrix}) = |w^2 I - wMM - NN| \quad (2.72)$$

Poniamo:

$$qs = b^T a \quad qs2 = b^T v \quad qs3 = b^T D_C a \quad qs4 = b^T D_C v$$

$$qsrt = (qs * qs4 - qs2 * qs3)$$

e ricordiamo le impostazioni iniziali:

$$a = M^{-1}e \quad v = M^{-1}c \quad c = \text{diag}(c) \quad D_C = \text{diag}(d - c)$$

Il polinomio (2.72) può essere scritto nella forma:

$$ps(w) = (w - 1)^2 + (w - 1)(-yqs3 - xqs - yqs2) - (yqs + y^2qsrt) \quad (2.73)$$

Si dimostra mediante calcolo simbolico che il polinomio (2.70) e il polinomio (2.73) sono legati dalla seguente relazione:

$$\frac{\phi(w)}{(w - 1)^{2m-2}} = ps(w)$$

Osserviamo che in [9] consideriamo il metodo VRK (2.5) di tipo extended per risolvere l'equazione test di convoluzione (2.36), si ottiene la seguente relazione di ricorrenza:

$$y_{n+1} - (\mathbf{R} + \mathbf{W}^*)y_n + (\mathbf{R}\mathbf{W}^* - y\mathbf{R}^*\mathbf{W})y_{n-1} = 0 \quad (2.74)$$

dove:

$$\mathbf{R} = 1 + \mathbf{v}^T \mathbf{a}, \quad \mathbf{R}^* = \mathbf{b}^T \mathbf{a}, \quad \mathbf{W} = 1 + \mathbf{v}^T \mathbf{r}, \quad \mathbf{W}^* = 1 + y\mathbf{b}^T \mathbf{r}, \quad \mathbf{v} = \mathbf{E}\mathbf{b},$$

$$\mathbf{E} = xI_m + y \text{diag}(\mathbf{e} - \mathbf{c})$$

e

$$x = h\lambda, \quad y = h^2\mu, \quad \mathbf{a} = \mathbf{M}^{-1}\mathbf{u}, \quad \mathbf{r} = \mathbf{M}^{-1}\boldsymbol{\theta}, \quad \mathbf{M} = I_m - \mathbf{A}\mathbf{E}, \quad \mathbf{u} = [1, \dots, 1]^T.$$

Il polinomio caratteristico di (2.74) è:

$$C(z) = p(z, x, y) := z^2 - (\mathbf{R} + \mathbf{W}^*)z + \mathbf{R}\mathbf{W}^* - y\mathbf{R}^*\mathbf{W} \quad (2.75)$$

(cf. corollario (2.3.14)) tale polinomio coincide, nel caso di metodo BVRK, con il polinomio di stabilità (2.73).

Nel seguito, per comodità di notazione indichiamo il polinomio di stabilità usando la notazione:

$$ps(w, x, y) = a_2(x, y)(w - 1)^2 + (w - 1)a_1(x, y) + a_0(x, y) \quad (2.76)$$

dove:

$$a_0(x, y) = -(yqs + y^2qsrt) \quad a_1(x, y) = (-yqs3 - xqs - yqs2) \quad a_2(x, y) = \det(M).$$

Tale polinomio è equivalente al polinomio (2.73) se  $\det(M) \neq 0$ . Nel capitolo successivo vedremo quali tecniche si possono utilizzare per studiare le radici del polinomio caratteristico.

## Capitolo 3

# Costruzione di metodi altamente stabili

### 3.1 Introduzione

Applicando il metodo numerico ad una classe di equazioni test (cfr. § 2.3.2) si ottiene un'equazione alle differenze finite. La stabilità della equazione alle differenze finite è legata al polinomio caratteristico ad essa associato. E' noto che le soluzioni di tali equazioni vanno a zero ad infinito se tutte le radici del polinomio caratteristico sono in valore assoluto minori di uno, in tal caso si ha che anche la soluzione vera tende a zero ad infinito. Polinomi di questo tipo furono studiati da Schur, e per tale motivo prendono il nome di polinomi di Schur. Nel paragrafo (§ 3.2) descriveremo il criterio di Schur che definisce una condizione necessaria e sufficiente affinché un polinomio sia di Schur, un'alternativa al criterio di Schur consiste nel considerare una particolare trasformazione e applicare al polinomio trasformato il ben noto criterio di Routh-Hurwitz, descritto nel paragrafo (§ 3.3). Nel paragrafo (§ 3.4) sarà specificato il metodo usato in questa tesi per costruire metodi  $V_0$ -stabili di ordine  $p > 2$ . Infine, nei successivi paragrafi illustreremo la costruzione di nuovi metodi PVRK e BVRK  $V_0(\alpha)$ -stabili e  $V_0$ -stabili con i relativi grafici delle regioni di stabilità.

## 3.2 Criterio di Schur

Consideriamo un polinomio a coefficienti complessi di grado  $k$ :

$$\Phi(w) = c_k w^k + c_{k-1} w^{k-1} + \dots + c_1 w + c_0.$$

dove  $c_k \neq 0$ ,  $c_0 \neq 0$ . Il polinomio  $\Phi(w)$  è detto polinomio di Schur se tutte le radici  $w_i$ , per  $i = 1, \dots, k$  sono in modulo minori di uno. Definiamo il polinomio:

$$\hat{\Phi}(w) = \bar{c}_0 w^k + \bar{c}_1 w^{k-1} + \dots + \bar{c}_{k-1} w + \bar{c}_k.$$

dove  $\bar{c}_i$  sono i coefficienti complessi coniugati di  $c_i$ . Definiamo, anche, il polinomio:

$$\Phi_1(w) = \frac{1}{w} (\hat{\Phi}(0)\Phi(w) - \Phi(0)\hat{\Phi}(w)).$$

di grado al più  $k-1$ . Si ha il seguente teorema:

**Teorema 3.2.1** [29]  $\Phi(w)$  è un polinomio di Schur se e solo se

$$|\hat{\Phi}(0)| > |\Phi(0)|$$

e  $\Phi_1(w)$  è un polinomio di Schur.

**ESEMPIO 1:** Consideriamo il polinomio caratteristico (2.64) che si ottiene considerando la matrice di stabilità del metodo numerico (2.21-2.23):

$$S = \begin{bmatrix} M & N \\ I & 0 \end{bmatrix}$$

e calcolandone il determinante:

$$\phi(\theta) = \det(\theta^2 I - \theta M - N) \quad (3.1)$$

Sviluppando si ottiene :

$$\phi(\theta) = (\theta - 1)^2 \psi(\theta)$$

con:

$$\psi(\theta) = \theta^2 - (2 + (z+w)q^T a + w(q^T b - r^T a))\theta + (1 + zq^T a + w(q^T b - r^T a) + w^2(q^T a r^T b - q^T b r^T a)) \quad (3.2)$$

Usando il criterio di Schur, segue che le radici di  $\psi(\theta)$  sono nel cerchio unitario se e solo se:

$$\begin{aligned} & |1 + zq^T a + w(q^T b - r^T a) + w^2(q^T ar^T b - q^T br^T a)| < 1 \\ & |2 + (z + w)q^T a + w(q^T b - r^T a)| \\ & < |2 + zq^T a + w(q^T b - r^T a) + w^2(q^T ar^T b - q^T br^T a)| \end{aligned} \quad (3.3)$$

Se le condizioni (3.3) sono verificate e se si dimostra che il blocco di Jordan della matrice S relativo all'autovalore  $\theta = 1$  moltiplica sempre le componenti di un vettore che risultano nulle, il metodo VRK (2.21-2.23) risulta stabile.

Consideriamo l'autovalore  $\theta = 1$  che risulta avere molteplicità algebrica 2 e molteplicità geometrica 1, nella decomposizione in forma canonica di Jordan della matrice S, il blocco di Jordan relativo a tale autovalore sarà:

$$J_1 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

La matrice S ha ordine 4, indichiamo gli altri due autovalori con  $\lambda$  e  $\mu$ .

La decomposizione in forma canonica di Jordan della matrice S sarà:

$$P^{-1}SP = J = \begin{bmatrix} J_1 & 0 \\ 0 & J^* \end{bmatrix}$$

con :

$$J^* = \begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{bmatrix}$$

se  $\lambda \neq \mu$  oppure  $\lambda = \mu$  e  $\lambda$  ha molteplicità geometrica 2; oppure con :

$$J^* = \begin{bmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix}$$

se  $\lambda = \mu$  e  $\lambda$  ha molteplicità geometrica 1.

La matrice P è la matrice degli autovettori di S:

$$P = [p_1, p_2, p_3, p_4]$$

dove  $p_1, p_2$  rappresentano l'autovettore e l'autovettore generalizzato di  $\theta = 1$  mentre  $p_3, p_4$  rappresentano gli autovettori relativi agli autovalori  $\lambda$  e  $\mu$  o autovettore e

l'autovettore generalizzato se  $\lambda = \mu$  se  $\lambda$  ha molteplicità geometrica 1 [32]. Posto  $w_1 = P^{-1}v_1 = [w_1^1, w_1^2, w_1^3, w_1^4]^T$  si dimostra che  $w_1^1 = w_1^2 = 0$ . Consideriamo il vettore di starting  $v_1 = [\alpha_2, \beta_2, \alpha_1, \beta_1]^T$ , si ha:

$$v_1 = (S - I)[1, 0, 0, 0]^T$$

Considerando l'uguaglianza  $P^{-1}SP = J$ , si ha  $(S - I) = P(J - I)P^{-1}$ , segue che:

$$P^{-1}v_1 = P^{-1}(S - I)[1, 0, 0, 0]^T = (J - I)P^{-1}[1, 0, 0, 0]^T$$

ma la seconda riga della matrice  $(S - I)$  è il vettore nullo per cui  $w_1^2 = 0$ .

Si dimostra che la seconda componente del vettore  $P^{-1}[1, 0, 0, 0]^T$  è nulla e dato che la prima riga della matrice  $J - I$  è  $[0, 1, 0, 0]$  si ha che  $w_1^1 = 0$  [8].

Posto  $w_n = P^{-1}v_n$  si ha:

$$w_n = P^{-1}v_n = P^{-1}Sv_{n-1} = JP^{-1}v_{n-1} = Jw_{n-1} = \dots = J^{n-1}w_1$$

$$w_n = J^{n-1}w_1 = \begin{bmatrix} J_1^{n-1} & 0 \\ 0 & (J^*)^{n-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ w_1^3 \\ w_1^4 \end{bmatrix} = [0, 0, ((J^*)^{n-1}[w_1^3, w_1^4]^T)^T]^T.$$

Se la condizione necessaria e sufficiente (3.3) affinché il polinomio di stabilità sia di Schur è verificata la successione  $\|w_n\|$ , e di conseguenza la successione  $\|v_n\|$ , tende a zero per  $n \rightarrow \infty$ . Vale, pertanto, il seguente teorema:

**Teorema 3.2.2** *Per assegnati valori di  $z = h\xi$  e  $w = h^2\eta$ , con  $\xi, \eta$  parametri del kernel (2.36), il metodo VRK (2.21)-(2.23) è stabile se e solo se le condizioni (3.3) sono soddisfatte.*

### 3.3 Criterio di Routh-Hurwitz

Consideriamo il polinomio a coefficienti complessi:

$$\Phi(r) = c_k r^k + c_{k-1} r^{k-1} + \dots + c_1 r + c_0. \quad (3.4)$$

Applichiamo ad esso la trasformazione:

$$r = \frac{1+z}{1-z} \quad (3.5)$$

Tale trasformazione porta la circonferenza  $|r| = 1$  del piano  $r$  nell'asse immaginario del piano  $z$   $Re(z) = 0$ , il disco aperto  $|r| < 1$  del piano  $r$  nel semipiano negativo del piano complesso  $z$   $Re(z) < 0$  ed il punto  $r = 1$  nel punto  $z = 0$ . Applicando tale trasformazione al polinomio (3.4) e moltiplicando per  $(1-z)^k$  si ottiene un polinomio di grado  $k$  in  $r$ :

$$\Phi(z) = a_0 z^k + a_1 z^{k-1} + \dots + r_{n-1} z + a_k. \quad (3.6)$$

Per determinare le condizioni affinché gli zeri di un tale polinomio appartengano al semipiano di sinistra si può utilizzare il noto criterio di Routh-Hurwitz:

**Lemma 3.3.1** *Consideriamo il polinomio  $p(\zeta)$  definito come:*

$$P(\zeta) = a_0 \zeta^m + a_1 \zeta^{m-1} + \dots + a_m, \quad a_0 > 0$$

*e definiamo la  $n \times n$  matrice di Hurwitz*

$$Q_n := \begin{pmatrix} a_1 & a_3 & a_5 & \dots & a_{2n-1} \\ a_0 & a_2 & a_4 & \dots & a_{2n-2} \\ 0 & a_1 & a_3 & \dots & a_{2n-3} \\ 0 & a_0 & a_2 & \dots & a_{2n-4} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_n \end{pmatrix}$$

*Allora gli zeri di  $P(\zeta)$  hanno parte reale negativa se e solo se:*

$$\det(Q_n) > 0, \quad n = 1, \dots, m.$$

Per esempio, si verifica facilmente, che per  $m=2, 3$  e  $4$  si ha:  
Le radici di  $P(\zeta)$  hanno parte reale negativa se e solo se:

**m=2:**  $a_0, a_1$  e  $a_2$  sono positivi

**m=3:**  $a_0, a_1, a_2, a_3$  sono positivi e  $a_1 a_2 - a_0 a_3 > 0$



**m=4:**  $a_0, a_1, a_2, a_3, a_4$  sono positivi e  $a_1 a_2 a_3 - a_0 a_3^2 - a_4 a_1^2 > 0$

Consideriamo il polinomio di stabilità del metodo BVRK (2.76):

$$ps(w, x, y) = (w - 1)^2 + (w - 1)a_1(x, y) + a_0(x, y)$$

Per analizzare la stabilità del metodo numerico si deve verificare che il suddetto polinomio caratteristico è un polinomio di Schur. Un modo alternativo all'applicazione del criterio di Schur è considerare il polinomio  $\tilde{p}s(w, x, y) = (1 - w)^2 p\left(\frac{1+w}{1-w}, x, y\right)$  ed applicare ad esso il criterio di Routh-Hurwitz.

### 3.4 Costruzione di metodi con ordine $p > 2$

Obiettivo della tesi è determinare metodi  $V_0$ -stabili di ordine  $p > 2$ . La richiesta che un metodo numerico sia  $V_0$ -stabilità è una richiesta forte, in letteratura, ad oggi, sono presenti molti risultati negativi: è stato dimostrato che non esistono metodi  $V_0$ -stabili nella classe dei metodi di tipo Runge Kutta mixed semi espliciti ([5],[21],[14]); non esistono metodi nella classe dei *metodi di quadratura*  $(\rho, \sigma)$ -riducibili ([37]); non esistono metodi  $V_0$ -stabili nella classe dei metodi multilag e multilag modificati introdotti da Wolkenfelt ([37]) ([23]) è stato, inoltre, congetturato che non esistono metodi  $V_0$ -stabili nella classe dei metodi Generali Lineari ([38]) e che non esistono metodi  $V_0$ -stabili nella classe dei metodi PVRK impliciti extended ([7]). Metodi altamente stabili che coinvolgono le derivate del kernel sono state proposti da Vecchio in ([40]) e Piazza([42]). Metodi di ordine  $p \leq 4$  fortemente stabili che coinvolgono le derivate del nucleo sono stati introdotti da Lopez in ([41]) . Risultati positivi sono: esistenza di una classe di metodi VRK  $V_0$ -stabile di ordine due ([8]); esistenza di una classe di metodi BVRK  $V_0$ -stabile di ordine uno ([7]) e esistenza di una classe di metodi paralleli BVRK extended  $V_0$ -stabile di ordine due e uno ([4]). Le principali problematiche che si incontrano nella ricerca di metodi di ordine alto e incondizionatamente stabili rispetto all'equazione test di convoluzione (2.36) riguardano principalmente la non facile *gestione* delle numerose equazioni non lineari che scaturiscono dall'imposizione delle condizioni d'ordine e l'individuazione di un criterio generale per la determinazione della  $V_0$ -stabilità all'interno di una famiglia

di metodi. In particolare, vista la impossibilità di stabilire o negare l'esistenza di metodi  $V_0$ -stabili all'interno di una classe di metodi, dovuta alla dimensione delle matrici coinvolte ed al crescente numero di condizioni d'ordine non lineari per  $p > 2$ , abbiamo rilevato la necessità di ottenere informazioni sull'ampiezza delle regioni di stabilità dei metodi rispetto all'equazione test di convoluzione (2.36). Allo scopo di soddisfare tale esigenza e di avere la possibilità di determinare metodi aventi regioni di stabilità ampie ed illimitate, è stata introdotta in questa tesi la nuova definizione di  $V_0(\alpha)$ -stabilità. Grazie al concetto di  $V_0(\alpha)$ -stabilità e all'adattamento alle VIEs della tecnica del Boundary Locus già esistente per le Equazioni Differenziali Ordinarie (ODEs) è stato progettato ed implementato un algoritmo basato su un nuovo metodo per la costruzione di metodi  $V_0(\alpha)$  e  $V_0$ -stabili.

Tale metodo, basato sull'introduzione di una funzione per l'approssimazione dell'angolo  $\alpha$  di  $V_0(\alpha)$ -stabilità, e sull'utilizzo dell'algoritmo di ottimizzazione di Nelder-Mead, consente di determinare una lista di metodi *candidati* ad essere  $V_0$ -stabili. Successivamente, a ciascun elemento della lista viene applicato il criterio di Routh-Hurwitz per la verifica esatta della incondizionata stabilità del metodo.

Nei sottoparagrafi seguenti analizzeremo i vari passi nel dettaglio.

### 3.4.1 Definizione di $V_0(\alpha)$ -stabilità

Allo scopo di determinare metodi  $V_0$ -stabili introduciamo la seguente nuova definizione meno forte della definizione di  $V_0$ -stabilità:

**Definizione 3.1** *Un metodo VRK è detto  $V_0(\alpha)$ -stabile,  $\alpha \in [0, \pi/2)$  se  $R_f \supseteq \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 < \arctg(y/x) < \alpha \text{ con } x < 0\}$ .*

Un metodo VRK è detto  $V_0(\alpha)$ -stabile se la sua regione di forte stabilità contiene solo la porzione di piano rappresentata in figura (3.1).

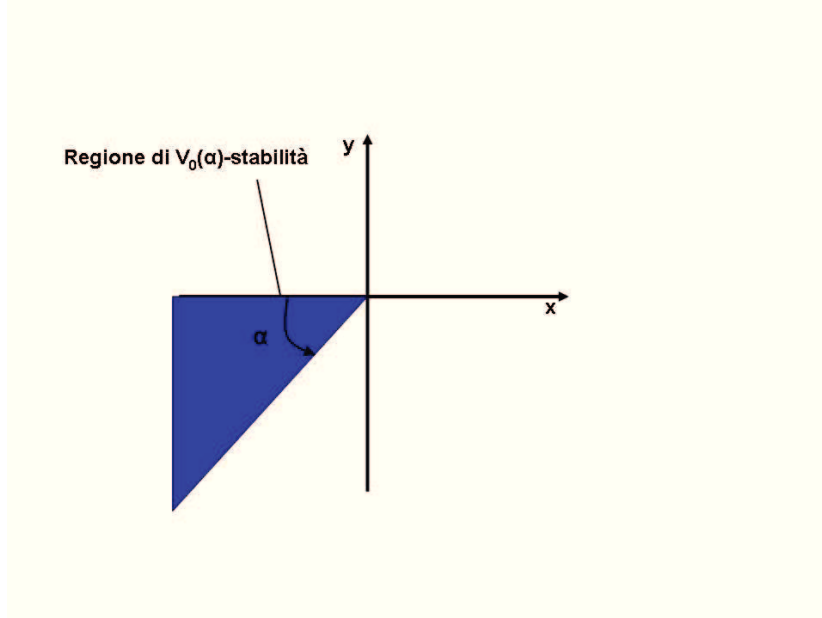


Figura 3.1: Regione di  $V_0(\alpha)$ -stabilità

### 3.4.2 Tecnica del Boundary Locus per VIEs

In questo paragrafo adattiamo la tecnica del Boundary Locus (BL) descritta da Lambert [30] per le ODEs al caso delle VIEs.

Il Boundary Locus, denotato con  $BL(R_f)$ , è l'insieme dei punti  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$  tale che almeno una delle radici del polinomio caratteristico ha modulo uno:

$$BL(R_f) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : ps(e^{i\theta}, x, y) = 0, \theta \in [0, 2\pi]\}$$

Poichè le radici di un polinomio sono funzioni continue dei suoi coefficienti, la frontiera della regione di forte stabilità  $\partial R_f$  deve essere contenuta nel  $BL(R_f)$ .

**Osserviamo che :Il Boundary Locus di un metodo numerico  $V_0$ -stabile non interseca il terzo quadrante.**

L'idea principale della nostra tecnica è basata sull'osservazione precedente, infatti, abbiamo cercato di ottenere informazioni sulla  $V_0$  e  $V_0(\alpha)$ -stabilità di un dato metodo numerico analizzando le intersezione delle curve del Boundary Locus  $BL(R_f)$  con il terzo quadrante del piano  $(x, y)$ .

Nel seguito mostriamo i calcoli effettuati per determinare il Boundary Locus del metodo BVRK; consideriamo il polinomio di stabilità (2.76):

$$ps(w) = a_0(x, y) + a_1(x, y)(w - 1) + a_2(x, y)(w - 1)^2$$

Vogliamo determinare il Boundary Locus della regione di stabilità cioè l'insieme dei punti per i quali la seguente identità è verificata:

$$a_0(x, y) + a_1(x, y)(e^{i\theta} - 1) + a_2(x, y)(e^{i\theta} - 1)^2 = 0 \quad (3.7)$$

Sicuramente a tale insieme appartengono i punti  $w = \pm 1$ . Sostituendo tali valori in (3.7), si ottiene:

$$a_0(x, y) = 0, \quad a_0(x, y) - 2a_1(x, y) + 4a_2(x, y) = 0$$

Cerchiamo le radici  $w \neq \pm 1 \iff \theta \neq 0 \pm k\pi$  con  $k \in \mathbb{N}$ , sostituiamo in (3.7)  $e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$ , abbiamo:

$$\begin{aligned} a_0(x, y) - a_1(x, y) + \cos\theta(a_1(x, y) - 2a_2(x, y) + 2a_2(x, y)\cos(\theta)) + \\ i(a_1(x, y)\sin\theta - 2a_2(x, y)\sin\theta + 2a_2(x, y)\cos\theta\sin\theta) = 0 \end{aligned}$$

Affinchè valga l'uguaglianza si deve avere che la parte reale e la parte immaginaria del polinomio siano nulle, mettendole a sistema si ha:

$$\begin{cases} a_0(x, y) - a_1(x, y) + \cos\theta(a_1(x, y) - 2a_2(x, y) + 2a_2(x, y)\cos\theta) = 0 \\ \sin\theta(a_1(x, y) - 2a_2(x, y) + 2a_2(x, y)\cos\theta) = 0 \end{cases} \quad (3.8)$$

Per  $\theta \neq \pm k\pi$  con  $k \in \mathbb{N}$  si ha  $\sin\theta \neq 0$  per cui con semplici calcoli si ottiene  $a_0(x, y) - a_1(x, y) = 0$ .

Riassumendo, la frontiera della regione di stabilità  $\partial R_f$  sicuramente è contenuta nel Boundary Locus:

$$BL(R_f) := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | a_0(x, y) - a_1(x, y) = 0 \quad \cup \quad a_0(x, y) = 0 \quad \cup \quad a_0(x, y) - 2a_1(x, y) + 4a_2(x, y) = 0\}$$

(3.9)

### 3.4.3 Costruzione della funzione $f_{np}$

L'idea centrale della nuova tecnica per la determinazione di metodi  $V_0$ -stabili è l'osservazione fatta nel paragrafo precedente che il Boundary Locus di un metodo numerico  $V_0$ -stabile non interseca il terzo quadrante. Dato un intero positivo  $np$ , definiamo:

$$\theta_i = i \frac{\pi/2}{np} : \quad s_i = \{(x, y) : y = tg(\theta_i)x, x < 0\}$$

Consideriamo l'insieme:

$$I = \{\theta_i, i = 1, \dots, np - 1 : s_i \cap BL(R_f) \neq \emptyset\},$$

Definiamo la funzione:  $f_{np}(\mathbf{c}, \mathbf{b}, \mathbf{A}, \mathbf{D}, \mathbf{e}, \theta) : \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^{m \times m} \times \mathbb{R}^{m \times m} \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$  tale che:

$$f_{np}(\mathbf{c}, \mathbf{b}, \mathbf{A}, \mathbf{D}, \mathbf{e}, \theta) = \begin{cases} \min I & \text{if } I \neq \emptyset \\ \frac{\pi}{2} & \text{if } I = \emptyset \end{cases}.$$

Questa funzione per un dato intero positivo  $np$  e per un metodo numerico BVRK definito dai parametri  $\mathbf{c}, \mathbf{b}, \mathbf{A}, \mathbf{d}$  determina l'angolo minimo di intersezione delle curve del Boundary Locus con il fascio di semirette  $\{s_i\}_{i=1, \dots, np-1}$  (vedi figura (3.2)).

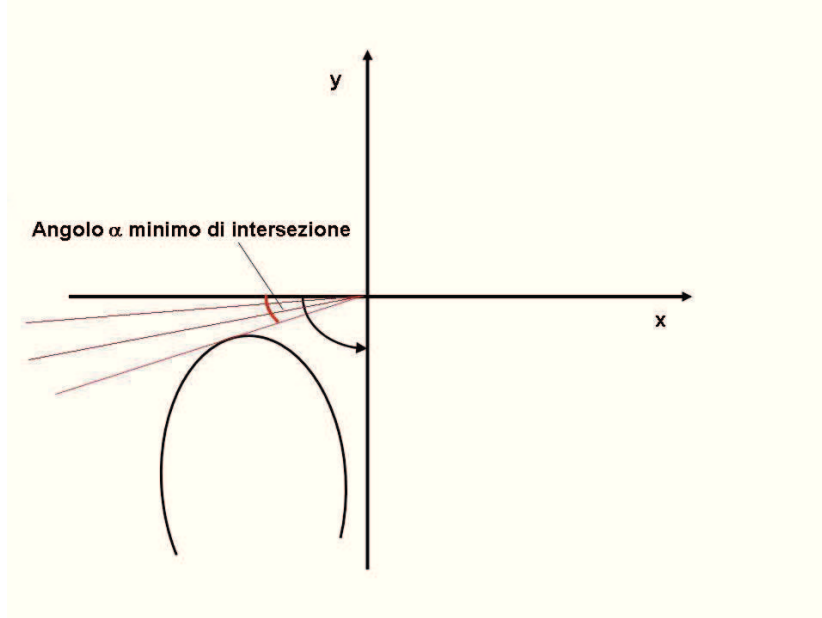


Figura 3.2: Esempio di angolo minimo di intersezione  $\alpha$

Ovviamente, se, per un dato  $np$ , si ottiene  $f_{np}(\mathbf{c}, \mathbf{b}, \mathbf{A}, \mathbf{d}) = \bar{\alpha}$  non possiamo affermare che il corrispondente metodo BVRK è un metodo  $V_0(\bar{\alpha})$ -stabile, ma se considerando una successione di interi crescente  $\{np_k\}_k$  e se la successione di angoli corrispondente  $\{\alpha_k : \alpha_k = f_{np_k}(\mathbf{A}, \mathbf{c}, \mathbf{d}, \mathbf{b})\}_k$  tende ad  $\bar{\alpha}$  al crescere di  $k$  possiamo affermare che il corrispondente metodo BVRK è un *buon metodo candidato* ad essere un metodo  $V_0(\bar{\alpha})$ -stabile o  $V_0$ -stabile, nel caso in cui  $\bar{\alpha} = \pi/2$ . Ovviamente la  $V_0$ -stabilità della lista di metodi candidati l'abbiamo verificata applicando il criterio di Routh-Hurwitz.

Nel seguito riportiamo lo pseudocodice dell'algoritmo della funzione  $\alpha = f_{np}(v)$ .

```

Procedure  $f_{np}$ (in: c,b,A,d; out: $\alpha$ )

 $h_a := \frac{\pi/2}{np}$ 
 $\alpha := \pi/2$ 
RadiciReali:=0
i:=0
while(RadiciReali:=0 and  $i < np$  )
     $\theta_i := i * h_a$ 
    null(in:  $p_1(r), p_2(r), p_3(r)$ ; out:root)
    if (root[i].i < 1.0E-16 )
         $\alpha := \theta_i$ 
        RadiciReali:=1
    end if
    i:=i+1
end while

```

Dove *null* è una procedura che dati in input i polinomi  $p_1(r), p_2(r), p_3(r)$  fornisce in output le loro radici; il polinomio  $p_1(r)$  è il polinomio di grado  $m$  in  $r$  dato da  $a_0(x, y) - a_1(x, y)$  applicando la conversione da coordinate cartesiane a coordinate polari con  $\theta_i := i * h_a$ ; il polinomio  $p_2(r)$  è il polinomio di grado  $m$  in  $r$  dato da  $a_0(x, y)$  applicando la conversione da coordinate cartesiane a coordinate polari con  $\theta_i := i * h_a$  e il polinomio  $p_3(r)$  è il polinomio di grado  $m$  in  $r$  dato da  $a_0(x, y) - 2a_1(x, y) + 4$  applicando la conversione da coordinate cartesiane a coordinate polari con  $\theta_i := i * h_a$ .

#### 3.4.4 Massimizzazione dell'angolo $\alpha$ di $V_0(\alpha)$ -stabilità

Al fine di ottenere metodi aventi regioni di stabilità  $R_f$  ampie rispetto all'equazione test di convoluzione (2.36), la funzione  $f_{np}$  viene data in input

ad una routine che usa il ben noto algoritmo Nelder-Mead [35] per la ricerca diretta mediante semplici del minimo/massimo locale di una funzione in più variabili non vincolate senza usare le derivate. Questo algoritmo, per esempio è implementato nella funzione *fminsearch* sia in matlab che in scilab e in una routine di mathematica *NMinimize*. Abbiamo effettuato numerose analisi dei metodi PVRK e BVRK per ordine  $p = 2, 3$  e  $4$  variando il numero degli stadi  $m$  e scegliendo differenti strutture della matrice dei coefficienti al fine di ottenere metodi  $V_0$ -stabili di ordine maggiore di due computazionalmente efficienti.

La scelta più conveniente dal punto di vista computazionale è usare matrici dei coefficienti diagonali, infatti, sebbene per la VRK formula il numero delle valutazioni del kernel per passo non viene modificato, il vantaggio è per il calcolo degli stadi  $\{Y_j^n\}_{j=1..m}$  in quanto, con una matrice  $A$  diagonale, usando  $m$  processori si potrebbero calcolare in parallelo. Abbiamo, però, dimostrato che:

**Proposizione 3.4.1** *Un metodo BVRK di ordine  $p = 3$  che soddisfa la row-sum condition (2.20) non può avere  $a_{ij} = 0$  per  $i \neq j$*

Dim. Per la row-sum condition si ha  $a_{i,j} = c_i$ ,  $i = 1, \dots, m$ . Le condizioni d'ordine #6 e #8 :

$$6. \quad b^T(c * c) = 1/3$$

$$8. \quad b^T A c = 1/6$$

dovrebbero essere uguali.  $\square$

**Proposizione 3.4.2** *Un metodo BVRK di ordine  $p > 3$  non può avere  $a_{ij} = 0$  per  $i \neq j$*

Dim. Se  $A$  è diagonale allora :

$$\text{diag}(d)A = A\text{diag}(d) \quad \text{diag}(c)A = A\text{diag}(c)$$

per cui :

$$\text{diag}(d)c = \text{diag}(c)d$$



Le condizioni #14 e #15:

$$14. b^T(\text{diag}(c) A d) = 1/4$$

$$15. b^T(\text{diag}(d) A c) = 1/6$$

sono in contraddizione.  $\square$

Nel corso della ricerca di metodi altamente stabili nei metodi PVRK e BVRK abbiamo, poi, focalizzato l'attenzione sui metodi BVRK perchè:

- ogni metodo VRK (incluso quello di tipo Pouzet) può essere scritto come un metodo BVRK con un possibile incremento del numero degli stadi
- ai BVRK appartengono i metodi  $V_0$ -stabili, ad oggi esistenti, di ordine  $p \leq$  due;
- congettura di Brunner et al.[7] "*Metodi PVRK impliciti extended non possono essere  $V_0$ -stabili*".

Nel seguito riportiamo due tabelle riassuntive degli angoli di  $V_0(\bar{\alpha})$ -stabilità determinate per alcuni metodi PVRK e BVRK. In queste tabelle l'acronimo SDI indica Struttura Diagonale Implicita [34], TI indica Triangolare Inferiore e Q.D. Quasi Diagonale.

CASO	ORDINE	STADI	CASO	$\bar{\alpha}^\circ$
PVRK	p=2	m=2	matrice A SDI	78,14
PVRK		m=2	matrice A TI	78,15
PVRK		m=3	matrice A SDI	82,10
PVRK		m=3	matrice A TI	82,36
PVRK	p=3	m=2	matrice A TI	19,99
PVRK		m=3	matrice A SDI	80,12
PVRK		m=3	matrice A TI	80,64
PVRK		m=4	matrice A SDI	82,28
PVRK	p=4	m=3	matrice A TI	30,63
PVRK		m=4	matrice A SDI	81,25
PVRK		m=4	matrice A TI	76,63

Tabella 3.1: Angoli di  $V_0(\bar{\alpha})$ -stabilità per i metodi PVRK

CASO	ORDINE	STADI	CASO	$\bar{\alpha}^\circ$
BVRK	p=3	m=3	matrice A SDI con $d_1 = d_3 = 1$	89,70
BVRK		m=3	matrice A TI con $d_1 = d_3 = 1$	89,75
BVRK		m=3	matrice A SDI con $d_2 = d_3 = 1$	> 89,991
BVRK		m=3	matrice A TI con $d_2 = d_3 = 1$	89,99
BVRK		m=4	matrice Q.D. con $d_1 = d_3 = d_4 = 1$	90
BVRK	p=4	m=8	matrice Q.D.	90

Tabella 3.2: Angoli di  $V_0(\bar{\alpha})$ -stabilità per i metodi BVRK

Come si vede nella tabella (3.1) nel caso di metodi di tipo Pouzet, in accordo con la congettura di Brunner et al. ([7]), non sono stati determinati metodi  $V_0$ -stabili ma l'angolo massimo di  $V_0(\bar{\alpha})$ -stabilità è stato  $\bar{\alpha} = 82,36^\circ$  nel caso di ordine  $p = 2$  e stadi  $m = 3$ . Nella tabella (3.2) sono riportati i risultati dell'analisi dei metodi BVRK. Siamo partiti da metodi a tre stadi di ordine tre ottenendo metodi  $V_0(\alpha)$ -stabili con angoli molto vicini a  $90^\circ$  ma non metodi  $V_0$ -stabili. Per tale motivo abbiamo considerato ragionevole aumentare il numero degli stadi di uno per ottenere la  $V_0$ -stabilità. Il numero dei parametri liberi è però risultato troppo alto per gestire i calcoli nel caso generale ma al fine di ottenere metodi computazionalmente efficienti abbiamo imposto alla matrice dei coefficienti una struttura particolarmente conveniente. Le stesse scelte sono state effettuate nel caso di ordine quattro, in questo caso abbiamo ottenuto metodi  $V_0$ -stabili aumentando il numero degli stadi a otto.

Nei paragrafi successivi i singoli casi saranno trattati nel dettaglio.

## 3.5 Costruzione di metodi PVRK

### 3.5.1 Caso m=2; p=2

In questo caso abbiamo considerato una matrice  $\mathbf{A}$  a struttura diagonalmente implicita ([34]), cioè della forma:

$$A = \begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ a_{2,1} & \lambda \end{bmatrix} \quad \text{con} \quad b = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix}, \quad c = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix}.$$

L'uso di matrici di questa forma dà dei vantaggi a livello computazionale (come per i metodi DIRK-SDIRK per ODEs, vedi ([33])). Imponendo le condizioni d'ordine tabella (2.1) abbiamo ottenuto la seguente famiglia a due parametri  $c_2, b_2$  di ordine  $p = 2$ :

$$A = \begin{bmatrix} \frac{1-2b_2c_2}{2-2b_2} & 0 \\ \frac{1-2c_2}{2(-1+b_2)} & \frac{1-2b_2c_2}{2-2b_2} \end{bmatrix} \quad b = \begin{bmatrix} 1-b_2 \\ b_2 \end{bmatrix} \quad c = \begin{bmatrix} \frac{1-2b_2c_2}{2-2b_2} \\ c_2 \end{bmatrix}$$

Il polinomio di stabilità  $p(w, x, y)$  della famiglia di metodi rispetto all'equazione test di convoluzione (2.36) è:

$$p(w, x, y) = a_2(w-1)^2 + a_1(w-1) + a_0;$$

$$\begin{aligned} a_2 &= \frac{(2-2b_2+x(-1+2b_2c_2))^2}{4(-1+b_2)^2} \\ a_1 &= \frac{1}{8(-1+b_2)^3} (4x^2(-1+b_2)^2(-1+b_2(-1+4c_2)) \\ &\quad + y(8-8b_2^3-2b_2^2(-12+y(1-2c_2)^2) + b_2(-24-y(1-c_2)^2(-3+2c_2))) \\ &\quad + 4x(-1+b_2)^2(2-2b_2+y(-1+b_2(-1+4c_2)))) \\ a_0 &= -\frac{y(4-8b_2+b_2^2(4+y(1-2c_2)^2)-2x(-1+b_2)(-1+b_2(-1+4c_2)))}{4(-1+b_2)^2} \end{aligned} \quad (3.10)$$

Applicando la tecnica descritta nel paragrafo (§3.4) e verificando mediante il calcolo simbolico abbiamo determinato tre coppie di metodi  $V_0(\bar{\alpha})$ -stabili con angolo  $\bar{\alpha} = 78, 14^\circ$ , un esempio di metodo si ottiene scegliendo come parametri:

$$b_2 = \frac{134}{109}, \quad c_2 = \frac{140}{229}$$

Il cui grafico del Boundary Locus è rappresentato in figura:

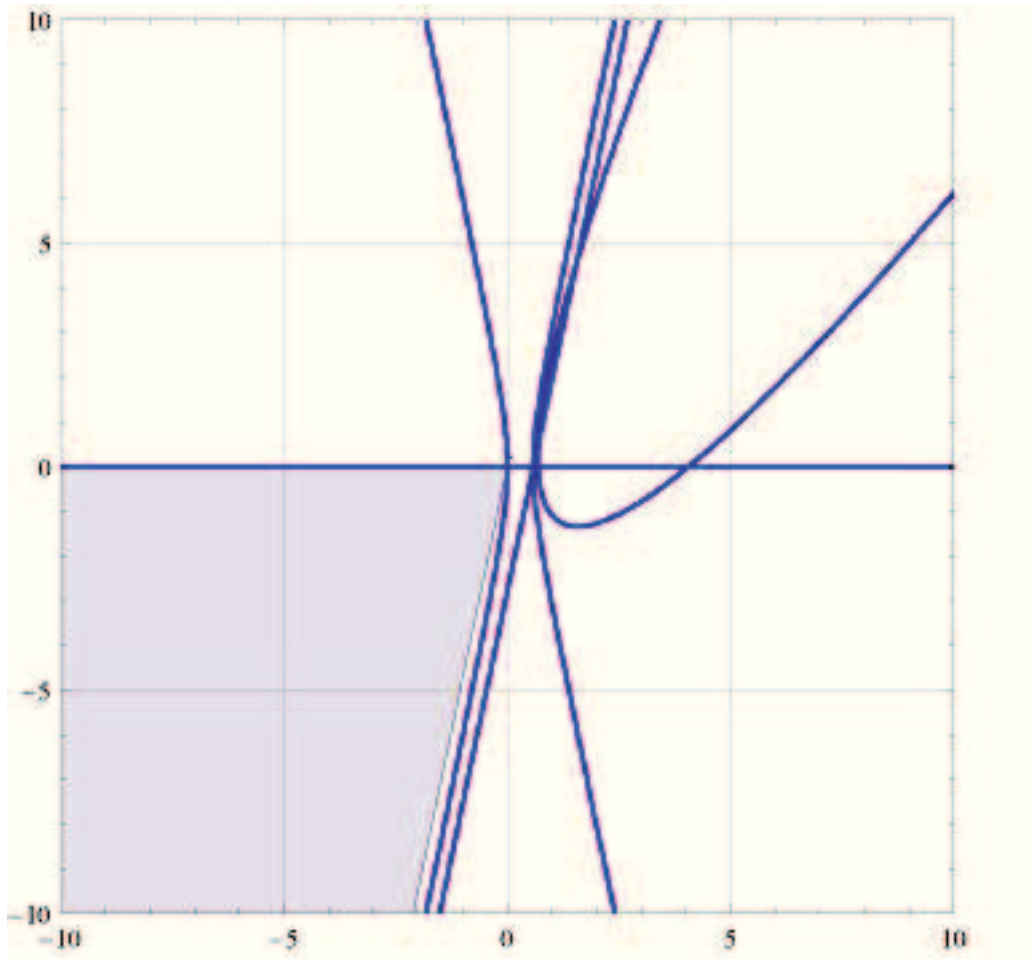


Figura 3.3: BL Metodo PVRK  $m=2$   $p=2$  con matrice a struttura diagonalmente implicita con retta  $y=\tan[78.14^\circ] x$

La figura, ottenuta utilizzando il calcolo simbolico, rappresenta il grafico del Boundary Locus del metodo considerato. La parte in grigio indica la regione di  $V_0(\alpha)$ -stabilità con angolo  $\alpha = 78.14^\circ$ .

In questo caso abbiamo considerato una matrice  $\mathbf{A}$  a struttura triangolare inferiore, cioè della forma:

$$A = \begin{bmatrix} a_{1,1} & 0 \\ a_{2,1} & a_{2,2} \end{bmatrix} \quad \text{con} \quad b = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix}, \quad c = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix}.$$

L'uso di matrici di questo tipo dà vantaggi a livello computazionale (come per i metodi DIRK-SDIRK per ODEs, vedi ([33])).

Imponendo le condizioni d'ordine tabella (2.1) abbiamo ottenuto la seguente famiglia a tre parametri  $c_2, b_2, a_{2,2}$  di ordine  $p = 2$ :

$$A = \begin{bmatrix} \frac{1-2b_2c_2}{2-2b_2} & 0 \\ -a_{2,2} + c_2 & a_{2,2} \end{bmatrix} \quad b = \begin{bmatrix} 1 - b_2 \\ b_2 \end{bmatrix} \quad c = \begin{bmatrix} \frac{1-2b_2c_2}{2-2b_2} \\ c_2 \end{bmatrix}$$

Il polinomio di stabilità  $p(w, x, y)$  della famiglia di metodi rispetto all'equazione test di convoluzione (2.36) è:

$$p(w, x, y) = a_2(w - 1)^2 + a_1(w - 1) + a_0;$$

$$\begin{aligned} a_2 &= \frac{(-1+xa_{2,2})(2-2b_2+x(-1+2b_2c_2))}{2(-1+b_2)} \\ a_1 &= \frac{1}{4(-1+b_2)^2} (2x^2(-1+b_2)(2a_{2,2}(-1+b_2) + b_2(-1+2c_2)) + 2x(-1+b_2)(2-2b_2+ \\ &\quad y(2a_{2,2}(-1+b_2) + b_2(-1+2c_2))) + y(-4-2b_2^2(2+y(a_{2,2}-c_2)(-1+2c_2))+ \\ &\quad b_2(8-y(a_{2,2}-c_2)(3-8c_2+4c_2^2)))) \\ a_0 &= \frac{y(4-b_2(4+y(-1+2a_{2,2})(-1+2c_2))+x(4a_{2,2}(-1+b_2)+2b_2(-1+2c_2)))}{4(-1+b_2)} \end{aligned} \quad (3.11)$$

Applicando la tecnica descritta nel paragrafo (§3.4) e verificando mediante il calcolo simbolico abbiamo determinato un metodo  $V_0(\bar{\alpha})$ -stabili con angolo  $\bar{\alpha} = 78, 15^\circ$  i cui parametri sono i seguenti:

$$b_2 = -\frac{13}{80}, \quad c_2 = \frac{203}{67}, \quad a_{2,2} = \frac{152}{87}$$

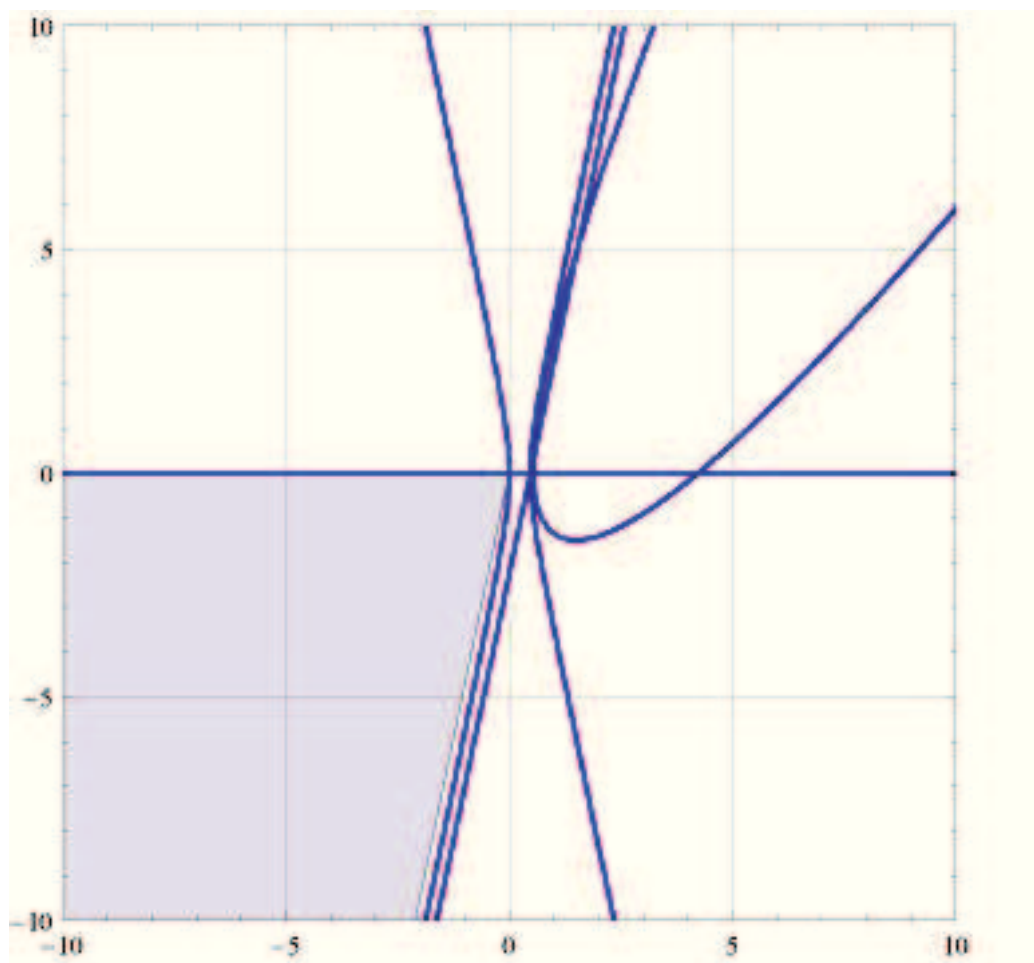


Figura 3.4: BL Metodo PVRK  $m=2$   $p=2$  con matrice LT con retta  $y=\tan[78.15^\circ] x$

La figura, ottenuta utilizzando il calcolo simbolico, rappresenta grafico del Boundary Locus del metodo considerato. La parte in grigio indica la regione di  $V_0(\alpha)$ -stabilità con angolo  $\alpha = 78.15^\circ$ .



### 3.5.2 Caso m=3; p=3

In questo caso abbiamo considerato una matrice  $\mathbf{A}$  a struttura diagonalmente implicita [34], cioè della forma:

$$A = \begin{bmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ a_{2,1} & \lambda & 0 \\ a_{3,1} & a_{3,2} & \lambda \end{bmatrix} \quad \text{con} \quad b = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix}, \quad c = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{bmatrix}.$$

L'uso di matrici di questa forma dà dei vantaggi a livello computazionale ([33]). Imponendo le condizioni d'ordine tabella (2.1) abbiamo ottenuto la seguente famiglia a tre parametri  $c_1, c_2, c_3$  di ordine  $p = 3$ :

$$A = \begin{bmatrix} c_1 & 0 & 0 \\ -c_1 + c_2 & c_1 & 0 \\ \frac{(c_1 - c_3)(-3c_2 + 3c_2^2 + c_1(2 + 6c_2 - 6c_2^2 - 6c_3) + c_3 + c_1^2(-3 + 6c_3))}{c_1^2(3 - 6c_2) + (2 - 3c_2)c_2 + c_1(-2 + 6c_2^2)} & \frac{(1 - 6c_1 + 6c_1^2)(c_1 - c_3)(-c_2 + c_3)}{c_2(-2 + 3c_2) + c_1^2(-3 + 6c_2) + c_1(2 - 6c_2^2)} & c_1 \end{bmatrix}$$

$$b = \begin{bmatrix} \frac{2 - 3c_3 + c_2(-3 + 6c_3)}{6(c_1 - c_2)(c_1 - c_3)} \\ \frac{-2 + c_1(3 - 6c_3) + 3c_3}{6(c_1 - c_2)(c_2 - c_3)} \\ \frac{-2 + c_1(3 - 6c_2) + 3c_2}{6(c_1 - c_3)(-c_2 + c_3)} \end{bmatrix}, \quad c = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{bmatrix}.$$

Il polinomio di stabilità  $p(w, x, y)$  della famiglia di metodi rispetto all'equazione test di convoluzione (2.36) è:

$$p(w, x, y) = a_2(w - 1)^2 + a_1(w - 1) + a_0;$$

$$\begin{aligned} a_2 &= -(-1 + xc_1)^3 \\ a_1 &= \frac{1}{6}(-x^3(1 - 9c_1 + 18c_1^2) - x^2(-1 + 6c_1)(-3 + y(-1 + 3c_1)) - \\ &\quad y(6 + y(1 + c_1(3 + c_2(9 - 6c_3) - 9c_3) - 3c_1^2(1 + 2c_2 - 4c_3) + 3c_2(-1 + c_3)) + \\ &\quad y^2(1 - 6c_1 + 6c_1^2)(c_1 - c_2)(1 + c_1 - c_3)(c_2 - c_3)) - \\ &\quad x(6 + y(3 - 18c_1) + y^2(-6c_1^4 - c_2^2 + 3c_1^3(1 + 4c_2 - 2c_3) + c_3 + c_2c_3 - c_3^2 + \\ &\quad c_1(-2 + 6c_2^2 + c_2(4 - 9c_3) - 5c_3 + 6c_3^2) + c_1^2(2 - 6c_2^2 + 9c_3 - 6c_3^2 + 3c_2(-5 + 4c_3)))) \\ a_0 &= -\frac{1}{36}y(36 + 3y + 6x^2(1 - 9c_1 + 18c_1^2) - 3x(-6 + 36c_1 + y(-1 + 9c_1 - 18c_1^2 + 12c_1^3)) + \\ &\quad y^2(-2 - 6c_2^2 + 18c_1^3(-1 + 2c_2) + 6c_3 - 6c_3^2 + 3c_2(1 + c_3) - 3(c_1^2) \\ &\quad (-7 + 12c_2^2 - 12c_2(-1 + c_3) - 6c_3 + 12c_3^2) + 3c_1(-1 + c_2 + 12c_2^2 - 7c_3 - 12c_2c_3 + 12c_3^2))) \end{aligned} \quad (3.12)$$

Applicando la tecnica descritta nel paragrafo (§3.4 ) e verificando mediante il calcolo simbolico abbiamo determinato una sola terna di metodi  $V_0(\bar{\alpha})$ -stabili con angolo  $\bar{\alpha} = 80,12^\circ$  con i seguenti parametri :

$$c_1 = \frac{127}{102}, \quad c_2 = \frac{33}{86}, \quad c_3 = \frac{150}{599}$$

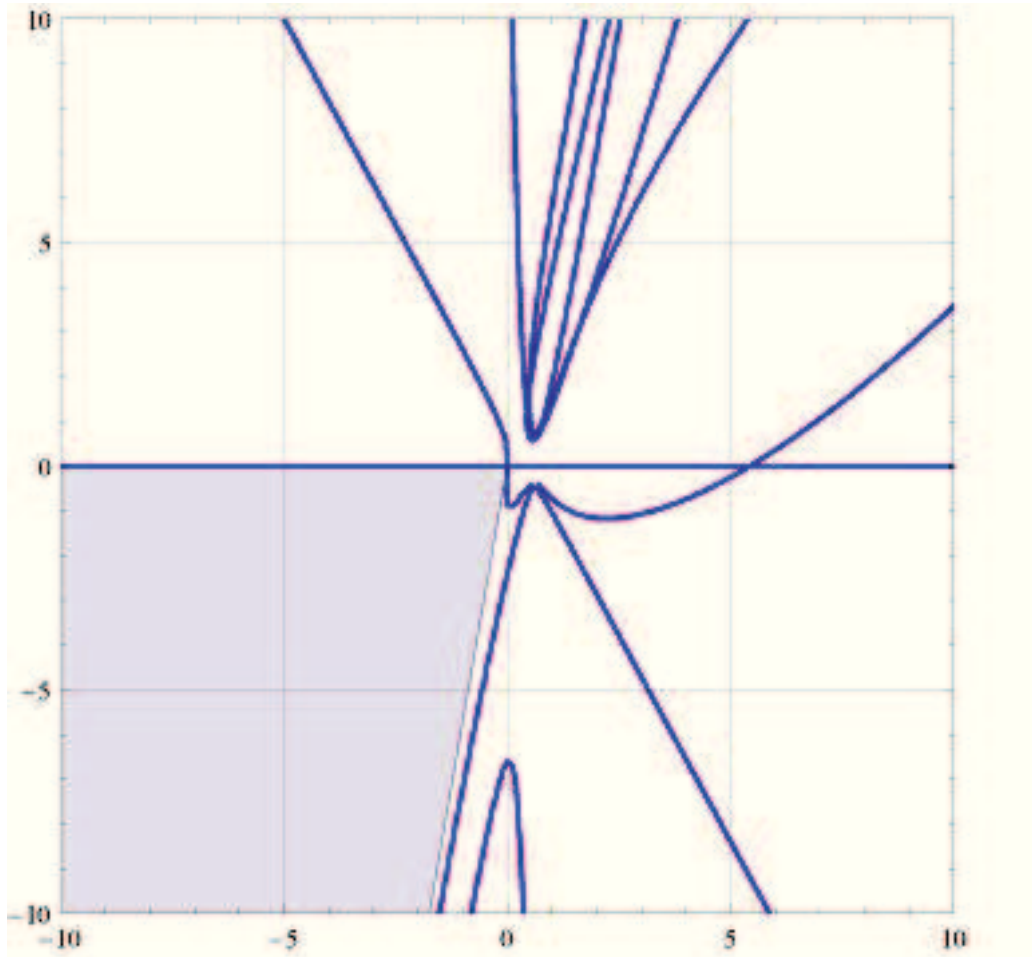


Figura 3.5: BL Metodo PVRK m=3 p=3 con matrice a struttura diagonalmente implicita con retta  $y=\tan[80.12^\circ] x$

La figura, ottenuta utilizzando il calcolo simbolico, rappresenta il grafico del Boundary Locus del metodo considerato. La parte in grigio indica la regione di  $V_0(\alpha)$ -stabilità con angolo  $\alpha = 80.12^\circ$ .

In questo caso abbiamo considerato una matrice  $\mathbf{A}$  a struttura triangolare inferiore , cioè della forma:

$$A = \begin{bmatrix} a_{1,1} & 0 & 0 \\ a_{2,1} & a_{2,2} & 0 \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} \end{bmatrix} \quad \text{con} \quad b = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix}, \quad c = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{bmatrix}.$$

L'uso di matrici di questo tipo dà vantaggi a livello computazionale ([33]).

Imponendo le condizioni d'ordine tabella (2.1) abbiamo ottenuto la seguente famiglia a cinque parametri  $c_1, c_2, c_3, a_{2,2}, a_{3,3}$  di ordine  $p = 3$ :

$$A = \begin{bmatrix} c_1 & 0 & 0 \\ -a_{2,2} + c_2 & a_{2,2} & 0 \\ \frac{\alpha}{c_2(-2+3c_2)+c_1^2(-3+6c_2)+c_1(2-6c_2^2)} & \frac{\beta}{c_2(-2+3c_2)+c_1^2(-3+6c_2)+c_1(2-6c_2^2)} & a_{3,3} \end{bmatrix}$$

con

$$\alpha = c_1 c_2 - 3c_1^2 c_2 + a_{3,3}(2 - 3c_2 + c_1(-3 + 6c_2))(c_2 - c_3) + c_1 c_3 - 3c_2 c_3 + 3c_1 c_2 c_3 + 6c_1^2 c_2 c_3$$

$$+ 3c_2^2 c_3 - 6c_1 c_2^2 c_3 + c_3^2 - 3c_1 c_3^2 + a_{2,2}(c_1^2(3 - 6c_3) + (2 - 3c_3)c_3 + c_1(-2 + 6c_3^2))$$

$$\beta = (c_1 - c_3)(a_{3,3}(-2 + c_1(3 - 6c_2) + 3c_2) + (-1 + 3c_1)(c_2 - c_3) + a_{2,2}(2 - 3c_3 + c_1(-3 + 6c_3)))$$

$$\text{con} \quad b = \begin{bmatrix} \frac{2-3c_3+c_2(-3+6c_3)}{6(c_1-c_2)(c_1-c_3)} \\ \frac{-2+c_1(3-6c_3)+3c_3}{6(c_1-c_2)(c_2-c_3)} \\ \frac{-2+c_1(3-6c_2)+3c_2}{6(c_1-c_3)(-c_2+c_3)} \end{bmatrix}, \quad c = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{bmatrix}.$$

Il polinomio di stabilità  $p(w, x, y)$  della famiglia di metodi rispetto all'equazione test di convoluzione (2.36) è:

$$p(w, x, y) = a_2(w - 1)^2 + a_1(w - 1) + a_0;$$

$$\begin{aligned}
a_2 &= -(-1 + xa_{2,2})(-1 + xa_{3,3})(-1 + xc_1) \\
a_1 &= \frac{1}{6}(-x^3(1 - 3c_1 + a_{3,3}(-3 + 6c_1) + a_{2,2}(-3 + 6a_{3,3} + 6c_1)) - \\
&\quad x^2(3 - 6a_{2,2} - 6a_{3,3} - 6c_1 + y(1 - 3c_1 + a_{3,3}(-3 + 6c_1) + a_{2,2}(-3 + 6a_{3,3} + 6c_1))) - \\
&\quad y(6 - (y^2)(a_{2,2} - c_2)(1 + c_1 - c_3) \\
&\quad (a_{3,3}(-2 + c_1(3 - 6c_2) + 3c_2) + (-1 + 3c_1)(c_2 - c_3) + a_{2,2}(2 - 3c_3 + c_1(-3 + 6c_3))) + \\
&\quad y(1 + c_1 - 3c_2 + 6c_1c_2 + a_{3,3}(-2 + c_1(3 - 6c_2) + 3c_2) - 3c_1c_3 + \\
&\quad 3c_2c_3 - 6c_1c_2c_3 + 2a_{2,2}(2 - 3c_3 + c_1(-3 + 6c_3)))) - \\
&\quad x(6 - 3y(-1 + 2a_{2,2} + 2a_{3,3} + 2c_1) + y^2(c_1c_2 - 3c_1^2c_2 - c_2^2 + 3c_1c_2^2 + c_3 - \\
&\quad 3c_1c_3 + c_2c_3 - 3c_1c_2c_3 - c_3^2 + 3c_1c_3^2 + a_{2,2}^2(-2 + c_1(3 - 6c_3) + 3c_3) + \\
&\quad a_{3,3}(-2 + 6c_1^2c_2 + 3c_2^2 - 3c_1(-1 + 2c_2)(1 + c_2 - c_3) + 2c_3 - 3c_2c_3) + \\
&\quad a_{2,2}(3c_1^2 - 3a_{3,3}(-1 + 2c_1)(1 + c_1 - c_2) + 3c_2 - 4c_3 - \\
&\quad 3c_2c_3 + 3c_3^2 + c_1(-2 + 6c_2(-1 + c_3) + 9c_3 - 6c_3^2)))))) \\
a_0 &= \frac{1}{36}y(-36 - 3y - 6x^2(1 - 3c_1 + a_{3,3}(-3 + 6c_1) + a_{2,2}(-3 + 6a_{3,3} + 6c_1)) + \\
&\quad 3x(6(-1 + 2a_{2,2} + 2a_{3,3} + 2c_1) + y(-1 + a_{3,3}(3 - 6c_1) + 3c_1 + 3a_{2,2}(-1 + 2a_{3,3} + 3)(-1 + 2c_1))) + \\
&\quad y^2(2 - 3c_1 - 3c_2 + 12c_1c_2 - 18c_1^2c_2 + 6c_2^2 - 18c_1c_2^2 + \\
&\quad 3a_{3,3}(2 - 3c_2 + c_1(-3 + 6c_2))(1 + 2c_2 - 2c_3) - 6c_3 + 15c_1c_3 - 3c_2c_3 + 36c_1^2c_2c_3 + \\
&\quad 6c_3^2 - 18c_1c_3^2 + 6a_{2,2}^2(2 - 3c_3 + c_1(-3 + 6c_3)) - 6a_{2,2}(a_{3,3}(2 - 3c_2 + c_1(-3 + 6c_2)) - \\
&\quad 3(c_2 - c_3)(-1 + c_3) + c_1^2(-3 + 6c_3) + c_1(2 + 6c_2(-1 + c_3) + 3c_3 - 6c_3^2))))))
\end{aligned} \tag{3.13}$$

Applicando la tecnica descritta nel paragrafo (§3.4) e verificando mediante il calcolo simbolico abbiamo determinato un metodo  $V_0(\bar{\alpha})$ -stabili con angolo  $\bar{\alpha} = 80,64^\circ$  con parametri:

$$c_1 = \frac{92}{89}, \quad c_2 = \frac{10}{31}, \quad c_3 = \frac{7}{65}, \quad a_{2,2} = \frac{143}{126}, \quad a_{3,3} = \frac{352}{235}$$

La figura, ottenuta utilizzando il calcolo simbolico, rappresenta il grafico del Boundary Locus del metodo considerato. La parte in grigio indica la regione di  $V_0(\alpha)$ -stabilità con angolo  $\alpha = 80.64^\circ$ .

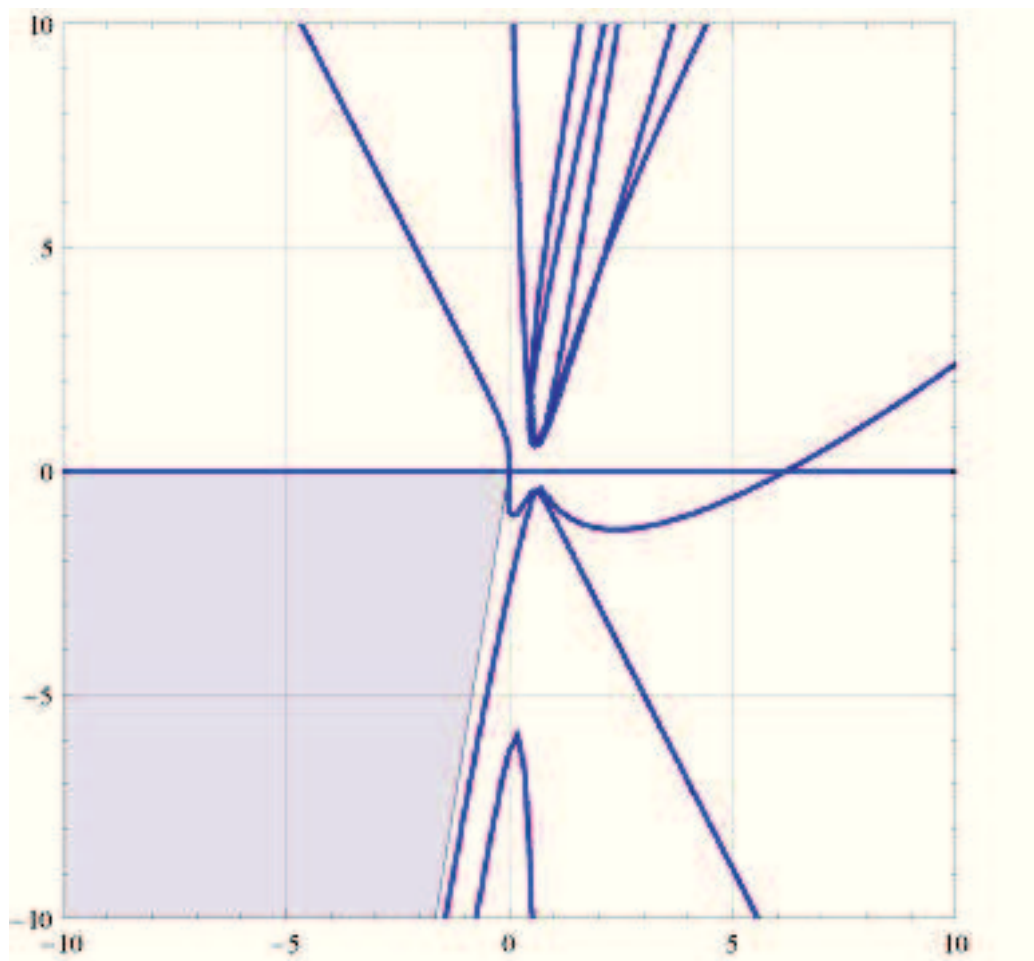


Figura 3.6: BL Metodo PVRK  $m=3$   $p=3$  con matrice LT con retta  $y=\tan[80.64] x$

### 3.5.3 Caso m=4; p=4

In questo paragrafo trattiamo i PVRK (2.12) con numero di stadi  $m = 4$  e ordine  $p = 4$ .

In questo caso abbiamo considerato una matrice  $\mathbf{A}$  a struttura diagonalmente implicita [34], cioè della forma:

$$A = \begin{bmatrix} \lambda & 0 & 0 & 0 \\ a_{2,1} & \lambda & 0 & 0 \\ a_{3,1} & a_{3,2} & \lambda & 0 \\ a_{4,1} & a_{4,2} & a_{4,3} & \lambda \end{bmatrix} \quad \text{con} \quad b = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ b_4 \end{bmatrix}, \quad c = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \\ c_4 \end{bmatrix}.$$

L'uso di matrici di questa forma dà dei vantaggi a livello computazionale ([33]). Imponendo le condizionin d'ordine tabella (2.1) abbiamo ottenuto la seguente famiglia a tre parametri  $c_1, c_3, c_4$  di ordine  $p = 4$ :

$$\begin{aligned} \lambda &= c_1 \\ a_{2,1} &= \frac{2(1-3c_1)}{1-6c_1+12c_1^2} \\ a_{3,1} &= \frac{\alpha}{(4c_1(-1+9c_1-24c_1^2+18c_1^3))} \\ a_{3,2} &= -\frac{\beta}{(4c_1(-1+9c_1-24c_1^2+18c_1^3))} \\ a_{4,1} &= \frac{\gamma}{(4c_1(-1+9c_1-24c_1^2+18c_1^3)(c_1-c_3)(-3+4c_3+12c_1^2(-1+2c_3)-8c_1(-2+3c_3)))} \\ a_{4,2} &= \frac{\delta}{\zeta} \\ a_{4,3} &= \frac{\varphi}{\psi} \end{aligned} \tag{3.14}$$

con

$$\begin{aligned} \alpha &= (144c_1^6 + c_3^2 - 288c_1^5(1 + c_3) - 4c_1c_3(2 + 3c_3) + 72c_1^4(3 + 6c_3 + 2c_3^2) \\ &\quad - 6c_1^3(11 + 46c_3 + 24c_3^2) + c_1^2(7 + 78c_3 + 60c_3^2)) \\ \beta &= ((1 - 6c_1 + 12c_1^2)(c_1 - c_3)(12c_1^3 - c_3 - 12c_1^2(1 + c_3) + c_1(3 + 6c_3))) \\ \gamma &= ((c_1 - c_4)(1728c_1^8(-1 + 2c_4) + c_4(-5c_3 + 4c_3^2 + 2c_4) - 1152c_1^7(-5 - 3c_3 \\ &\quad + 3c_3^2 + 9c_4 + 3c_4^2) + 144c_1^6(-53 + 90c_4 + 72c_4^2 + 24c_3^2(3 + c_4) - 2c_3(35 + 18c_4)) \\ &\quad - c_1(3c_4(1 + 16c_4) + 4c_3^2(7 + 18c_4) - 3c_3(9 + 32c_4)) - 72c_1^5(-71 + 124c_4 + 168c_4^2 \\ &\quad + 16c_3^2(11 + 6c_4) - 4c_3(42 + 37c_4)) + c_1^3(310 - 756c_4 - 2424c_4^2 + 48c_3(52 + 71c_4) \\ &\quad - 24c_3^2(109 + 96c_4)) + c_1^2(-21 + 80c_4 + 468c_4^2 + 24c_3^2(18 + 23c_4) - 6c_3(69 + 130c_4)) + \\ &\quad 12c_1^4(-149 + 292c_4 + 600c_4^2 + 12c_3^2(55 + 38c_4) - 4c_3(157 + 174c_4)))) \end{aligned} \tag{3.15}$$

$$\begin{aligned}
\delta &= -((1 - 6c_1 + 12c_1^2)(c_1 - c_4)(12c_1^3 - c_4 - 12c_1^2(1 + c_4) + c_1(3 + 6c_4)) \\
&\quad (5c_3 - 4c_3^2 - 2c_4 + 144c_1^5(-1 + 2c_4) - 48c_1^4(-7 - 6c_3 + 6c_3^2 + 15c_4) \\
&\quad - 12c_1^2(-7 - 21c_3 + 18c_3^2 + 19c_4) + 24c_1^3(-11 - 20c_3 \\
&\quad + 18c_3^2 + 26c_4) + c_1(-9 - 58c_3 + 48c_3^2 + 36c_4))) \\
\zeta &= (4c_1(-1 + 9c_1 - 24c_1^2 + 18c_1^3)(-3 + 4c_3 + 12c_1^2(-1 + 2c_3) - 8c_1(-2 + 3c_3)) \\
&\quad (12c_1^3 - c_3 - 12c_1^2(1 + c_3) + c_1(3 + 6c_3))) \\
\varphi &= ((-1 + 12c_1 - 36c_1^2 + 24c_1^3)(c_1 - c_4)(-c_3 + c_4)(12c_1^3 - c_4 - 12c_1^2(1 + c_4) + c_1(3 + 6c_4))) \\
\psi &= ((-3 + 4c_3 + 12c_1^2(-1 + 2c_3) - 8c_1(-2 + 3c_3))(12c_1^4 + c_3^2 - 12c_1^3(1 + 2c_3) \\
&\quad - 2c_1c_3(2 + 3c_3) + 3c_1^2(1 + 6c_3 + 4c_3^2))) \\
&\hspace{25em} (3.16) \\
b &= \left[ \frac{(3 - 4c_4 + c_3(-4 + 6c_4) - 24c_1^3(2 - 3c_4 + c_3(-3 + 6c_4)) + 12c_1^2(7 - 10c_4 + 2c_3(-5 + 9c_4)) - 6c_1(5 - 7c_4 + c_3(-7 + 12c_4)))}{(24c_1(-1 + 3c_1)(c_1 - c_3)(c_1 - c_4))} \right. \\
&\quad \frac{((1 - 6c_1 + 12c_1^2)^3(-3 + c_3(4 - 6c_4) + 4c_4 + 2c_1(2 - 3c_4 + c_3(-3 + 6c_4))))}{(24c_1(-1 + 3c_1)(12c_1^3 - c_3 - 12c_1^2(1 + c_3) + c_1(3 + 6c_3))(12c_1^3 - c_4 - 12c_1^2(1 + c_4) + c_1(3 + 6c_4)))} \\
&\quad \frac{-((1 - 6c_1 + 6c_1^2)(-3 + 4c_4 + 12c_1^2(-1 + 2c_4) - 8c_1(-2 + 3c_4)))}{(12(12c_1^4 + c_3^2 - 12c_1^3(1 + 2c_3) - 2c_1c_3(2 + 3c_3) + 3c_1^2(1 + 6c_3 + 4c_3^2))(c_3 - c_4))} \\
&\quad \left. \frac{-((1 - 6c_1 + 6c_1^2)(-3 + 4c_3 + 12c_1^2(-1 + 2c_3) - 8c_1(-2 + 3c_3)))}{(12(c_1 - c_4)(-c_3 + c_4)(12c_1^3 - c_4 - 12c_1^2(1 + c_4) + c_1(3 + 6c_4)))} \right], \\
c &= \begin{bmatrix} c_1 \\ \frac{(3(1 - 2c_1)^2 c_1)}{(1 - 6c_1 + 12c_1^2)} \\ c_3 \\ c_4 \end{bmatrix}.
\end{aligned}$$

Il polinomio di stabilità  $p(w, x, y)$  della famiglia di metodi rispetto all'equazione test di convoluzione (2.36) è:

$$p(w, x, y) = a_2(w - 1)^2 + a_1(w - 1) + a_0;$$



$$\begin{aligned}
a_2 &= (-1 + xc_1)^4 \\
a_1 &= \frac{1}{(24(1-6c_1+12c_1^2)^2)} (x^4(1-6c_1+12c_1^2)^2(-1+16c_1-72c_1^2+96c_1^3) + x^3(1- \\
&\quad 6c_1+12c_1^2)^2(-4(1-6c_1)^2 + y(-1+16c_1-72c_1^2+96c_1^3)) + x^2(12(-1+8c_1)(1-6c_1+12c_1^2)^2 \\
&\quad -4y(1-12c_1+48c_1^2-72c_1^3)^2 + y^2(c_3^2+1728c_1^8(-1+2c_3-2c_4) - c_3c_4 + (-1+ \\
&\quad c_4)c_4 - 864c_1^7(-3+4c_3^2-8c_3(-2+c_4) - 14c_4+4c_4^2) + 24c_1^4(-42+180c_3^2+c_3(227-276c_4) \\
&\quad -217c_4+180c_4^2) + c_1^2(-47+240c_3^2+c_3(142-312c_4) - 236c_4+240c_4^2) - \\
&\quad 24c_1^5(-85+348c_3^2+c_3(588-576c_4) - 504c_4+348c_4^2) - 2c_1^3(-149+660c_3^2+c_3(600-936c_4) \\
&\quad -702c_4+660c_4^2) + c_1(3-24c_3^2+23c_4-24c_4^2+7c_3(-1+4c_4)) + 144c_1^6(-19+ \\
&\quad 60c_3^2-116c_4+60c_4^2-4c_3(-35+27c_4)))) + y(-24(1-6c_1+12c_1^2)^2 - 2y(1-6c_1+12c_1^2)^2 \\
&\quad -2y^3c_1(1-15c_1+72c_1^2-132c_1^3+72c_1^4)(12c_1^3-c_3-12c_1^2(1+c_3) + c_1(3+ \\
&\quad 6c_3))(1+c_1-c_4)(c_3-c_4) + y^2(c_3^2-864c_1^7(-1+4c_3^2+c_3(10-4c_4)-8c_4) + c_3(1-2c_4) \\
&\quad +3456c_1^8(c_3-c_4) + (-1+c_4)c_4+288c_1^6(-9+30c_3^2+c_3(33-30c_4) - 22c_4+6c_4^2) - \\
&\quad 2c_1(1+12c_3^2+c_3(10-20c_4) - 14c_4+12c_4^2) + 2c_1^2(3+120c_3^2+c_3(92-174c_4) \\
&\quad -136c_4+114c_4^2) + 12c_1^4(-71+360c_3^2+c_3(266-420c_4) - 280c_4 \\
&\quad +240c_4^2) - 4c_1^3(-29+330c_3^2+c_3(243-426c_4) - 321c_4+276c_4^2) - 24c_1^5(-95+ \\
&\quad 348c_3^2-222c_4+156c_4^2-6c_3(-47+62c_4)))) + x(-24(1-6c_1+12c_1^2)^2 \\
&\quad +12y(-1+8c_1)(1-6c_1+12c_1^2)^2 - 2y^2(1-6c_1+12c_1^2)(1+144c_1^6 \\
&\quad +2c_3(-1+c_4) - 288c_1^5(1+c_4) + 144c_1^4(1+c_3(-1+c_4)+4c_4) \\
&\quad -12c_1^3(7+31c_4+3c_3(-7+6c_4)) + 2c_1^2(19+51c_4+9c_3(-7+6c_4)) \\
&\quad -2c_1(5(1+c_4) + c_3(-13+12c_4))) + y^3(1728c_1^9 - c_3(c_3-c_4)(-1+c_4) - \\
&\quad 576c_1^8(7+(3+6c_3)c_4-6c_4^2) + 2c_1^3(-57+244c_4-234c_4^2+6c_3^2(-81+110c_4) + \\
&\quad c_3(-296+834c_4-660c_4^2)) + 2c_1(-((-1+c_4)c_4) + c_3^2(-11+12c_4) + c_3(-2+13c_4-12c_4^2)) + \\
&\quad 144c_1^7(21+46c_4-72c_4^2+12c_3^2(-1+2c_4) - 6c_3(3-14c_4+4c_4^2)) - 24c_1^6(-7+390c_4 \\
&\quad -504c_4^2+24c_3^2(-8+15c_4) - 12c_3(21-61c_4+30c_4^2)) + 12c_1^5(-101+530c_4-600c_4^2+ \\
&\quad 24c_3^2(-17+29c_4) - 4c_3(110-279c_4+174c_4^2)) + c_1^4(586-2364c_4+2424c_4^2 \\
&\quad -48c_3^2(-59+90c_4) + 24c_3(99-251c_4+180c_4^2)) \\
&\quad +c_1^2(8-51c_4+48c_4^2-6c_3^2(-33+40c_4) + c_3(77-280c_4+240c_4^2))))))
\end{aligned} \tag{3.17}$$

$$\begin{aligned}
a_0 = & -\frac{1}{(576(1-6c_1+12c_1^2)^2)}(y(576(1-6c_1+12c_1^2)^2+48y(1-6c_1+12c_1^2)^2-24x^3(1- \\
& 6c_1+12c_1^2)^2(-1+16c_1-72c_1^2+96c_1^3)+12x^2(1-6c_1+12c_1^2)^2(8(1-6c_1)^2 \\
& +y(1-16c_1+72c_1^2-96c_1^3+48c_1^4))-16y^2(1-6c_1+12c_1^2)(-1-6c_3(-1+c_4)+ \\
& 216c_1^5(-1+2c_4)-72c_1^4(-7+6c_3(-1+c_4)+15c_4)-18c_1^2(-6+16c_4+ \\
& 3c_3(-7+6c_4))+18c_1^3(-21+50c_4+6c_3(-7+6c_4))+6c_1(-1+5c_4+c_3(-13+12c_4))) \\
& +y^3(3(1-2c_4)^2+12c_3^2(-1+2c_4)+20736c_1^8(-1+(2+4c_3)c_4-4c_4^2)-4c_3(1-4c_4+6c_4^2) \\
& -48c_1^3(-85-33c_4+96c_4^2+12c_3^2(-13+55c_4)+c_3(-143+492c_4-660c_4^2)) \\
& -3456c_1^7(-21+34c_4+24c_3^2c_4-60c_4^2+c_3(-2+72c_4-24c_4^2)) \\
& -4c_1(7-52c_4+60c_4^2+12c_3^2(-5+12c_4)-4c_3(7-24c_4+36c_4^2))+ \\
& 1152c_1^6(-85+108c_4-162c_4^2+6c_3^2(-1+30c_4)-3c_3(7-88c_4+60c_4^2))+4c_1^2(-53-300c_4 \\
& +432c_4^2+36c_3^2(-13+40c_4)-12c_3(26-83c_4+120c_4^2))+144c_1^4(-161+82c_4- \\
& 44c_4^2+16c_3^2(-7+45c_4)-4c_3(35-152c_4+180c_4^2))-288c_1^5(-227+212c_4-252c_4^2 \\
& +12c_3^2(-5+58c_4)-2c_3(55-360c_4+348c_4^2))-8x(36(-1+8c_1)(1-6c_1+12c_1^2)^2+3y(-1 \\
& +8c_1)(1-6c_1+12c_1^2)^2+y^2(1+3c_3^2+5184c_1^8(1+2c_3-2c_4)-3c_4-3c_3c_4 \\
& +3c_4^2-864c_1^7(19+12c_3^2-24c_3(-2+c_4)-42c_4+12c_4^2)-c_1(19+72c_3^2+c_3(21-84c_4)-69c_4 \\
& +72c_4^2)+72c_1^4(69+180c_3^2+c_3(227-276c_4)-217c_4+180c_4^2)+3c_1^2(61+240c_3^2 \\
& +c_3(142-312c_4)-236c_4+240c_4^2)+432c_1^6(47+60c_3^2-116c_4+60c_4^2-4c_3(-35 \\
& +27c_4))-18c_1^3(65+220c_3^2-234c_4+220c_4^2-8c_3(-25+39c_4))-216c_1^5(61+116c_3^2 \\
& -168c_4+116c_4^2-4c_3(-49+48c_4))))))
\end{aligned} \tag{3.18}$$

Applicando la tecnica descritta nel paragrafo (§3.4) e verificando mediante il calcolo simbolico abbiamo determinato una terna di metodi  $V_0(\bar{\alpha})$ -stabili con angolo  $\bar{\alpha} = 81, 25^\circ$  con parametri:

$$c_1 = \frac{248}{149}, \quad c_2 = \frac{158}{159}, \quad c_3 = \frac{39}{55}$$

La figura, ottenuta utilizzando il calcolo simbolico, rappresenta il grafico Boundary Locus del metodo considerato. La parte in grigio indica la regione di  $V_0(\alpha)$ -stabilità con angolo  $\alpha = 81.25^\circ$ .

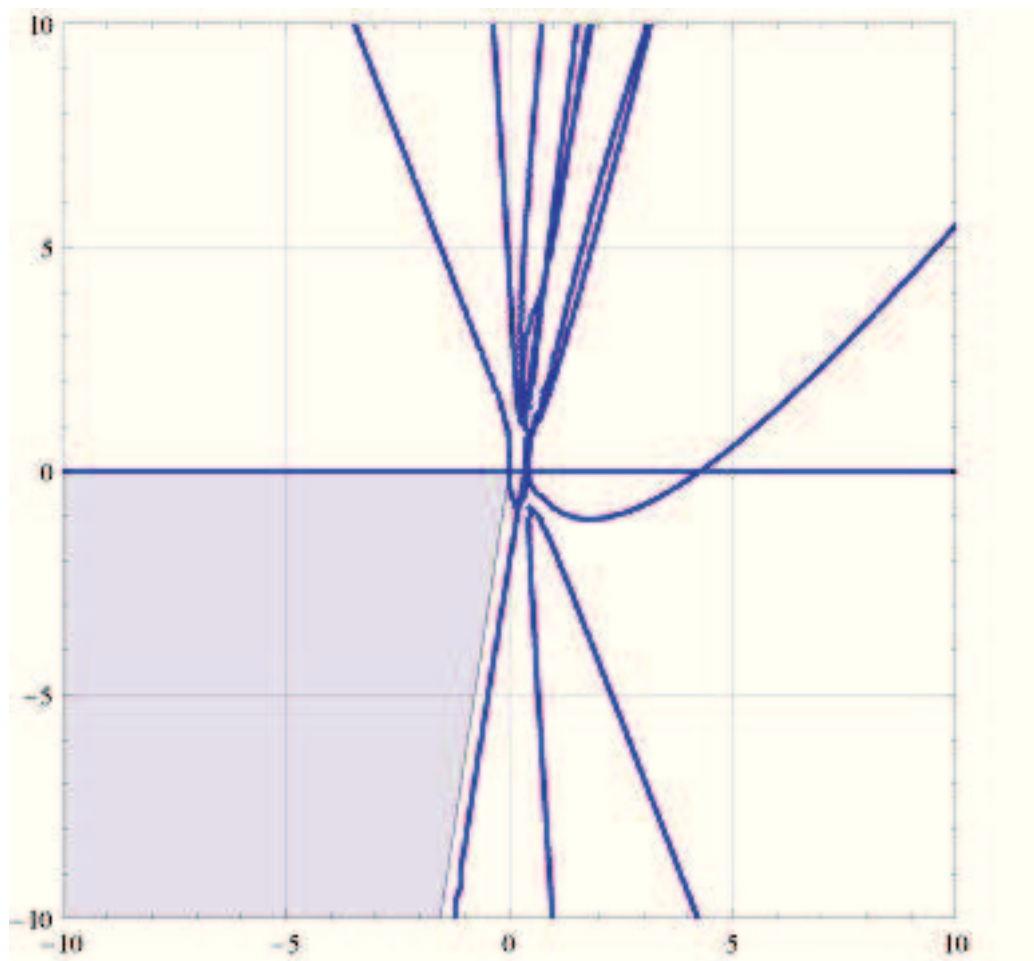


Figura 3.7: BL Metodo PVRK  $m=4$   $p=4$  con matrice a struttura diagonalmente implicita con retta  $y=\tan[81.25] x$

In questo caso abbiamo considerato una matrice  $\mathbf{A}$  a struttura triangolare inferiore, cioè della forma:

$$A = \begin{bmatrix} a_{1,1} & 0 & 0 & \\ a_{2,1} & a_{2,2} & 0 & 0 \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} & 0 \\ a_{4,1} & a_{4,2} & a_{4,3} & a_{4,4} \end{bmatrix} \quad \text{con} \quad b = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ b_4 \end{bmatrix}, \quad c = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \\ c_4 \end{bmatrix}.$$

L'uso di matrici di questo tipo dà vantaggi a livello computazionale ([33]).

Imponendo le condizioni d'ordine tabella (2.1) abbiamo ottenuto la seguente famiglia a sei parametri  $c_1, c_2, c_3, c_4, a_{2,2}, a_{3,3}$  di ordine  $p = 4$ :

$$\begin{aligned} a_{1,1} &= c_1, \\ a_{2,1} &= -a_{2,2} + c_2 \\ a_{2,2} &= a_{2,2} \\ a_{3,1} &= \frac{\alpha}{(2(c_1 - c_2)(-3 + c_2(4 - 6c_4) + 4c_4 + 2c_1(2 - 3c_4 + c_2(-3 + 6c_4))))} \\ a_{3,2} &= \frac{\beta}{2(c_1 - c_2)(-3 + c_2(4 - 6c_4) + 4c_4 + 2c_1(2 - 3c_4 + c_2(-3 + 6c_4))))} \\ a_{3,3} &= a_{3,3} a_{4,1} = \frac{\gamma}{(2(c_1 - c_2)(c_1 - c_3)(-3 + c_2(4 - 6c_3) + 4c_3 + 2c_1(2 - 3c_3 + c_2(-3 + 6c_3))))} \\ a_{4,2} &= \frac{\zeta}{(2(c_1 - c_2)(c_2 - c_3)(-3 + c_2(4 - 6c_3) + 4c_3 + 2c_1(2 - 3c_3 + c_2(-3 + 6c_3))))} \\ a_{4,3} &= \frac{((-1 + a_{3,3} + c_3)(c_1 - c_4)(c_2 - c_4)(-3 + c_2(4 - 6c_4) + 4c_4 + 2c_1(2 - 3c_4 + c_2(-3 + 6c_4))))}{((c_1 - c_3)(c_2 - c_3)(-3 + c_2(4 - 6c_3) + 4c_3 + 2c_1(2 - 3c_3 + c_2(-3 + 6c_3))))} \\ a_{4,4} &= 1 - c_4 \end{aligned} \tag{3.19}$$

con

$$\begin{aligned}
\alpha = & (-3c_1c_2 + 8c_1^2c_2 - 3c_1c_3 + 9c_2c_3 - 8c_1c_2c_3 - \\
& 12c_1^2c_2c_3 - 8c_2^2c_3 + 12c_1c_2^2c_3 - 3c_3^2 + 8c_1c_3^2 + \\
& 4c_1c_2c_4 - 12c_1^2c_2c_4 + 4c_1c_3c_4 - 12c_2c_3c_4 + \\
& 12c_1c_2c_3c_4 + 24c_1^2c_2c_3c_4 + 12c_2^2c_3c_4 - 24c_1c_2^2c_3c_4 \\
& + 4c_3^2c_4 - 12c_1c_3^2c_4 + 2a_{3,3}(c_2 - c_3)(-3 + c_2(4 - 6c_4)) \\
& + 4c_4 + 2c_1(2 - 3c_4 + c_2(-3 + 6c_4))) - 2a_{2,2}(c_1 - c_3)(-3 + \\
& c_3(4 - 6c_4) + 4c_4 + 2c_1(2 - 3c_4 + c_3(-3 + 6c_4)))) \\
\beta = & ((c_1 - c_3)((c_2 - c_3)(3 - 4c_4 + 4c_1(-2 + 3c_4)) - 2a_{3,3}(-3 + \\
& c_2(4 - 6c_4) + 4c_4 + 2c_1(2 - 3c_4 + c_2(-3 + 6c_4))) + 2a_{2,2}(-3 \\
& + c_3(4 - 6c_4) + 4c_4 + 2c_1(2 - 3c_4 + c_3(-3 + 6c_4)))))) \\
\gamma = & -(3c_1^2c_2 - 8c_1^3c_2 - 6c_2c_3 + 3c_1c_2c_3 + 8c_1^2c_2c_3 + \\
& 12c_1^3c_2c_3 + 8c_2^2c_3 - 8c_1c_2^2c_3 - 12c_1^2c_2^2c_3 + \\
& 8c_2c_3^2 - 8c_1c_2c_3^2 - 12c_1^2c_2c_3^2 - 12c_2^2c_3^2 + \\
& 24c_1c_2^2c_3^2 + 3c_1^2c_4 + 6c_2c_4 - 15c_1c_2c_4 + 4c_1^2c_2c_4 + \\
& 12c_1^3c_2c_4 - 8c_2^2c_4 + 16c_1c_2^2c_4 + 6c_3c_4 - 9c_1c_3c_4 - \\
& 8c_1^2c_3c_4 + c_2c_3c_4 + 12c_1c_2c_3c_4 - 12c_1^2c_2c_3c_4 - \\
& 24c_1^3c_2c_3c_4 - 8c_2^2c_3c_4 + 24c_1^2c_2^2c_3c_4 - 8c_3^2c_4 + \\
& 16c_1c_3^2c_4 - 8c_2c_3^2c_4 + 24c_1^2c_2c_3^2c_4 + 24c_2^2c_3^2c_4 - \\
& 48c_1c_2^2c_3^2c_4 - 6c_4^2 + 9c_1c_4^2 - 4c_1^2c_4^2 + 4c_1c_2c_4^2 \\
& - 12c_1^2c_2c_4^2 + 12c_2^2c_4^2 - 24c_1c_2^2c_4^2 - 3c_3c_4^2 + \\
& 4c_1c_3c_4^2 + 12c_1^2c_3c_4^2 + 8c_2c_3c_4^2 - 12c_1c_2c_3c_4^2 - \\
& 12c_2^2c_3c_4^2 + 24c_1c_2^2c_3c_4^2 + 12c_3^2c_4^2 - 24c_1c_3^2c_4^2 \\
& - 12c_2c_3^2c_4^2 + 24c_1c_2c_3^2c_4^2 + 8c_4^3 - 12c_1c_4^3 - \\
& 12c_2c_4^3 + 24c_1c_2c_4^3 - 8c_3c_4^3 + 12c_1c_3c_4^3 + \\
& 12c_2c_3c_4^3 - 24c_1c_2c_3c_4^3 + 2a_{3,3}(c_1 - c_4)(-c_2 + c_4)(-3 \\
& + c_2(4 - 6c_4) + 4c_4 + 2c_1(2 - 3c_4 + c_2(-3 + 6c_4))) + \\
& 2a_{2,2}(c_1 - c_3)(c_1 - c_4)(-3 + c_3(4 - 6c_4) + 4c_4 + 2c_1(2 - \\
& 3c_4 + c_3(-3 + 6c_4)))) \\
\zeta = & ((c_1 - c_4)(3c_2^2 - 8c_1c_2^2 - 6c_3 + 8c_1c_3 + 3c_2c_3 + 8c_3^2 - \\
& 12c_1c_3^2 - 8c_2c_3^2 + 12c_1c_2c_3^2 + 6c_4 - 8c_1c_4 - 9c_2c_4 + \\
& 16c_1c_2c_4 - 4c_2^2c_4 + 12c_1c_2^2c_4 + 3c_3c_4 - 8c_1c_3c_4 + \\
& 4c_2c_3c_4 - 12c_1c_2c_3c_4 - 12c_3^2c_4 + 24c_1c_3^2c_4 + \\
& 12c_2c_3^2c_4 - 24c_1c_2c_3^2c_4 - 8c_4^2 + 12c_1c_4^2 + 12c_2c_4^2 - \\
& 24c_1c_2c_4^2 + 8c_3c_4^2 - 12c_1c_3c_4^2 - 12c_2c_3c_4^2 + \\
& 24c_1c_2c_3c_4^2 - 2a_{3,3}(c_2 - c_4)(-3 + c_2(4 - 6c_4) + 4c_4 + \\
& 2c_1(2 - 3c_4 + c_2(-3 + 6c_4))) + 2a_{2,2}(c_2 - c_3)(-3 + c_3(4 - \\
& 6c_4) + 4c_4 + 2c_1(2 - 3c_4 + c_3(-3 + 6c_4))))))
\end{aligned} \tag{3.20}$$

$$\text{con} \quad b = \begin{bmatrix} \frac{(3-4c_4+c_3(-4+6c_4)+c_2(-4+c_3(6-12c_4)+6c_4))}{(12(c_1-c_2)(c_1-c_3)(c_1-c_4))} \\ \frac{(-3+c_3(4-6c_4)+4c_4+2c_1(2-3c_4+c_3(-3+6c_4)))}{(12(c_1-c_2)(c_2-c_3)(c_2-c_4))} \\ \frac{(3-4c_4+c_2(-4+6c_4)+c_1(-4+c_2(6-12c_4)+6c_4))}{(12(c_1-c_3)(c_2-c_3)(c_3-c_4))} \\ \frac{(-3+c_2(4-6c_3)+4c_3+2c_1(2-3c_3+c_2(-3+6c_3)))}{(12(c_3-c_4)(-c_1+c_4)(-c_2+c_4))} \end{bmatrix}, \quad c = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \\ c_4 \end{bmatrix}.$$

Il polinomio di stabilità  $p(w, x, y)$  della famiglia di metodi rispetto all'equazione test di convoluzione (2.36) è:

$$p(w, x, y) = a_2(w-1)^2 + a_1(w-1) + a_0;$$

Per semplicità di notazione la forma esplicita dei coefficienti  $a_2, a_1, a_0$  non viene di seguito riportata ma si osserva che  $a_2$  è polinomio di quarto grado in  $x$ ;  $a_1$  è un polinomio di quarto grado in  $x$  e  $y$  e  $a_0$  è un polinomio di terzo grado in  $x$  e di quarto grado in  $y$ .

Applicando la tecnica descritta nel paragrafo (§3.4) e verificando mediante il calcolo simbolico abbiamo determinato un metodo  $V_0(\bar{\alpha})$ -stabili con angolo  $\bar{\alpha} = 76, 63^\circ$  con parametri:

$$c_1 = \frac{99}{91}, \quad c_2 = -\frac{25}{81}, \quad c_3 = \frac{149}{163}, \quad c_4 = -\frac{9}{83}, \quad a_{2,2} = \frac{80}{67}, \quad a_{3,3} = \frac{25}{26}$$

Il polinomio di stabilità  $p(w, x, y)$  di tale metodo è:

$$\begin{aligned} p(w, x, y) = & \frac{w^2(13157326-57259553x+93263831x^2-67378540x^3+18216000x^4)}{13157326} \\ & + w(-2 - \frac{80284063x^4}{157887912} - y - \frac{y^2}{12} + \frac{(71482546908383198071y^3)}{1989712715503752747144} + \frac{(438732944213227272335y^4)}{17244176867699190475248} \\ & + \frac{(x^3(815161654+356899937y))}{157887912} + x^2(-\frac{(67923386)}{6578663} - \frac{(400961653y)}{78943956} \\ & - \frac{(324160263988868821907y^2)}{3979425431007505494288}) + \\ & x(\frac{3898530}{506051} + \frac{(1949265y)}{506051} + \frac{(1135498508311y^2)}{1389729401424} - \frac{(8455952625108345967y^3)}{189496449095595499728})) \\ & + (\frac{1}{206930122412390285702976}(206930122412390285702976 - 8675182721327716696752x^3 \\ & - 181268331257779656079176x^4 + 25270736102099910530836y^3 + 460400038703783205767y^4 + \\ & 416x^2(1609898150491332519051 + 278732271903070901372y^2) \\ & - 52x(13338692351916023515176 + 1974080017379857993047y^2 + 553058532787526946646y^3))) \end{aligned}$$

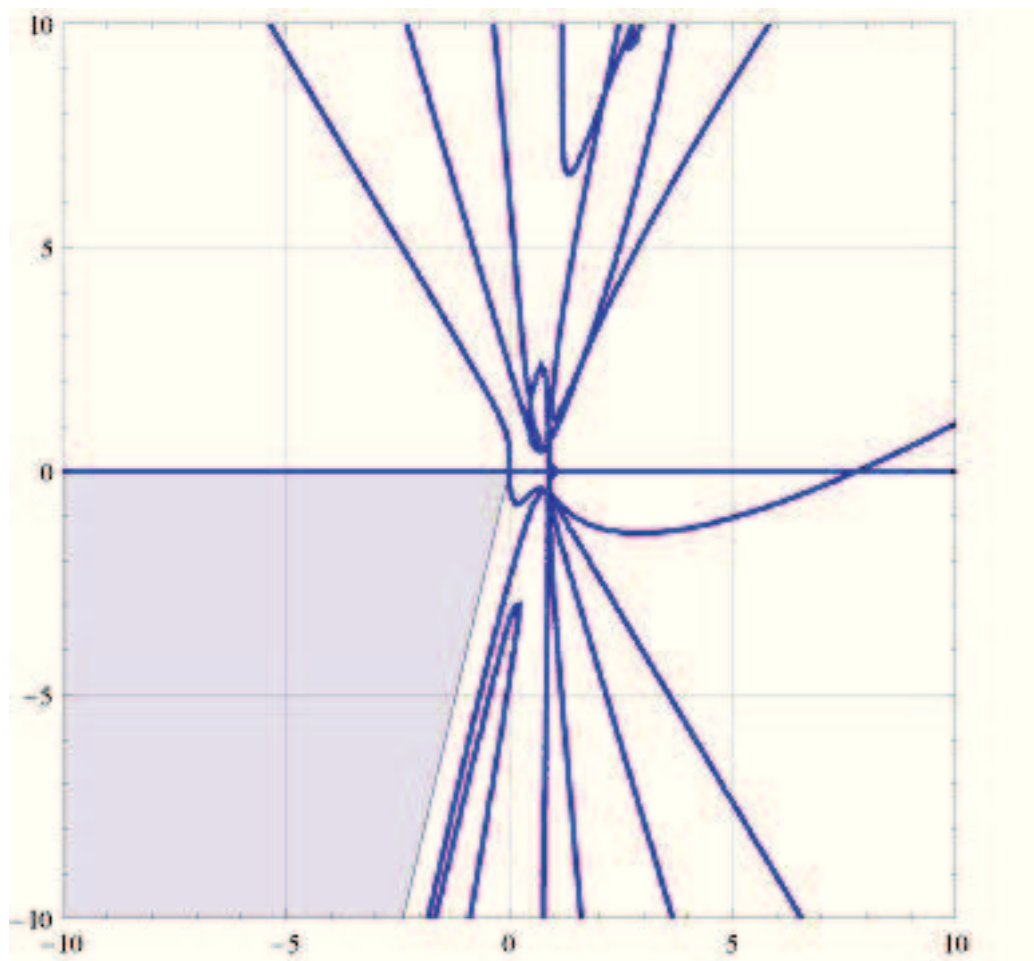


Figura 3.8: BL Metodo PVRK  $m=4$   $p=4$  con matrice LT con retta  $y=\tan[76.63^\circ] x$

La figura, ottenuta utilizzando il calcolo simbolico, rappresenta il grafico Boundary Locus del metodo considerato. La parte in grigio indica la regione di  $V_0(\alpha)$ -stabilità con angolo  $\alpha = 76.63^\circ$ .



### 3.5.4 Caso $p=m-1=2$

In questo caso abbiamo considerato una matrice  $\mathbf{A}$  a struttura diagonalmente implicita [34], cioè della forma:

$$A = \begin{bmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ a_{2,1} & \lambda & 0 \\ a_{3,1} & a_{3,2} & \lambda \end{bmatrix} \quad \text{con} \quad b = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix}, \quad c = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{bmatrix}.$$

L'uso di matrici di questa forma dà dei vantaggi a livello computazionale ([33]). Imponendo le condizioni d'ordine tabella (2.1) abbiamo ottenuto la seguente famiglia a cinque parametri  $b_2, b_3, c_2, c_3, a_{3,2}$  di ordine  $p = 2$ :

$$A = \begin{bmatrix} \frac{(-1+2b_2c_2+2b_3c_3)}{(2(-1+b_2+b_3))} & 0 & 0 \\ \frac{(1+2(-1+b_3)c_2-2b_3c_3)}{(2(-1+b_2+b_3))} & \frac{(-1+2b_2c_2+2b_3c_3)}{(2(-1+b_2+b_3))} & 0 \\ \frac{-(-1+2a_{3,2}(-1+b_2+b_3)+2b_2(c_2-c_3)+2c_3)}{(2(-1+b_2+b_3))} & a_{3,2} & \frac{(-1+2b_2c_2+2b_3c_3)}{(2(-1+b_2+b_3))} \end{bmatrix}$$

$$b = \begin{bmatrix} 1 - b_2 - b_3 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix} \quad c = \begin{bmatrix} \frac{(-1+2b_2c_2+2b_3c_3)}{(2(-1+b_2+b_3))} \\ c_2 \\ c_3 \end{bmatrix}$$

Il polinomio di stabilità  $p(w, x, y)$  della famiglia di metodi rispetto all'equazione test di convoluzione (2.36) è:

$$p(w, x, y) = a_2(w - 1)^2 + a_1(w - 1) + a_0;$$

Per semplicità di notazione la forma esplicita dei coefficienti  $a_2, a_1, a_0$  non viene di seguito riportata ma si osserva che  $a_2$  è polinomio di terzo grado in  $x$ ;  $a_1$  è un polinomio di terzo grado in  $x$  e  $y$  e  $a_0$  è un polinomio di secondo grado in  $x$  e di terzo grado in  $y$ .

Applicando la tecnica descritta nel paragrafo (§3.4) e verificando mediante il calcolo simbolico abbiamo ottenuto un metodo  $V_0(\bar{\alpha})$ -stabili con angolo  $\bar{\alpha} = 82, 10^\circ$  con parametri:

$$b_2 = \frac{117}{89}, \quad b_3 = \frac{361}{316}, \quad c_2 = \frac{49}{94}, \quad c_3 = 1, \quad a_{3,2} = \frac{79}{250}$$

Il polinomio di stabilità  $p(w, x, y)$  di tale metodo è:

$$\begin{aligned} p(w, x, y) = & -\left(\frac{(w^2(-1925919+1754963x)^3)}{7143549411240926559}\right) + w\left(-2 + \frac{(6414600649967043664613x^3)}{14287098822481853118000}\right) - y - \frac{(9913894868660721774647y^2)}{28574197644963706236000} \\ & - \frac{(1429373349986255791187y^3)}{59688323969479741915200} - \frac{(x^2(20388406055007000+7895351438852773y))}{7418327989122000} + x\left(\frac{2867953}{641973} + \frac{(2867953y)}{1283946}\right) \\ & + \frac{(33157835020336784677290837431y^2)}{110063180308381712300661768000} \Big) \\ & + (28323699503742992943651492000x^2 + 33862304024428423336687926612x^3 \\ & - x(190816777421208932421633840000 + 8449832481969027142275228737y^2) + 81954 \\ & \frac{(1342987289313294193092000+49777275267367691055787y^2+14011213561368431057685y^3)}{110063180308381712300661768000} \end{aligned}$$

La figura, ottenuta utilizzando il calcolo simbolico, rappresenta il grafico Boundary Locus del metodo considerato. La parte in grigio indica la regione di  $V_0(\alpha)$ -stabilità con angolo  $\alpha = 82.10^\circ$ .

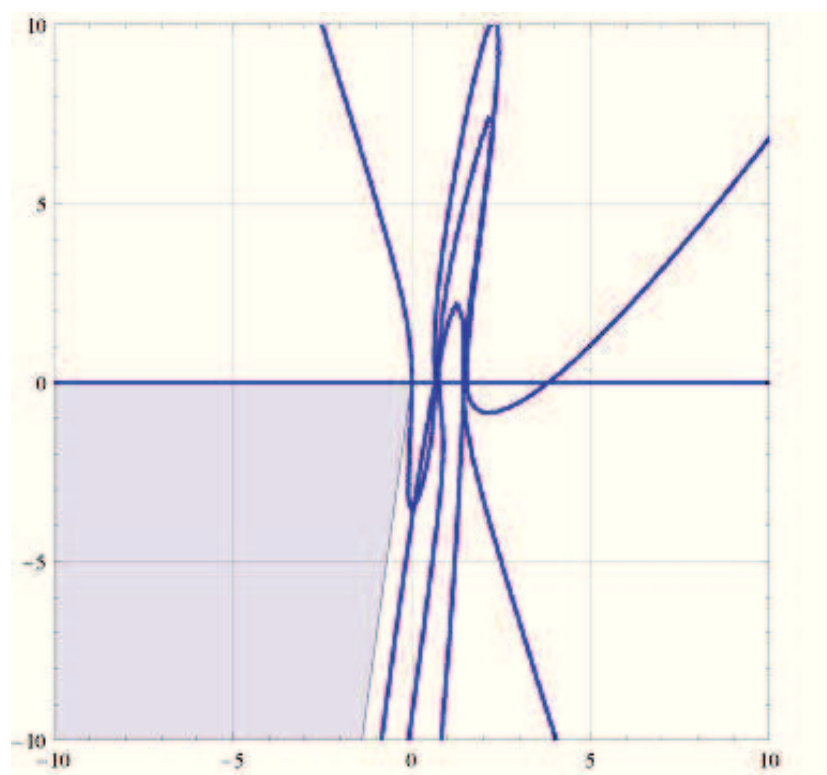


Figura 3.9: BL Metodo PVRK  $m=3$   $p=2$  con matrice a struttura diagonalmente implicita con retta  $y=\tan[82.10] x$

In questo caso abbiamo considerato una matrice  $\mathbf{A}$  a struttura triangolare inferiore, cioè della forma:

$$A = \begin{bmatrix} a_{1,1} & 0 & 0 \\ a_{2,1} & a_{2,2} & 0 \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} \end{bmatrix} \quad \text{con} \quad b = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix}, \quad c = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{bmatrix}.$$

L'uso di matrici di questo tipo dà vantaggi a livello computazionale ([33]).

Imponendo le condizioni d'ordine tabella (2.1) abbiamo ottenuto la seguente famiglia a sette parametri  $b_2, b_3, c_2, c_3, a_{2,2}, a_{3,2}, a_{3,3}$  di ordine  $p = 2$ :

$$A = \begin{bmatrix} \frac{(-1+2b_2c_2+2b_3c_3)}{(2(-1+b_2+b_3))} & 0 & 0 \\ -a_{2,2} + c_2 & a_{2,2} & 0 \\ -a_{3,2} - a_{3,3} + c_3 & a_{3,2} & a_{3,3} \end{bmatrix}$$

$$b = \begin{bmatrix} 1 - b_2 - b_3 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix} \quad c = \begin{bmatrix} \frac{(-1+2b_2c_2+2b_3c_3)}{(2(-1+b_2+b_3))} \\ c_2 \\ c_3 \end{bmatrix}$$

Il polinomio di stabilità  $p(w, x, y)$  della famiglia di metodi rispetto all'equazione test di convoluzione (2.36) è:

$$p(w, x, y) = a_2(w - 1)^2 + a_1(w - 1) + a_0;$$

$$\begin{aligned}
a_2 &= \frac{-((-1+xa_{2,2})(-1+xa_{3,3})(-2(-1+b_2+b_3)+x(-1+2b_2c_2+2b_3c_3)))}{(2(-1+b_2+b_3))} \\
a_1 &= \frac{1}{(4(-1+b_2+b_3)^2)} (-2x^3(-1+b_2+b_3)((a_{3,3}b_2-a_{3,2}b_3)(1+2(-1+b_3)c_2 \\
&\quad -2b_3c_3)) + a_{2,2}(2a_{3,3}(-1+b_2+b_3) + b_3(-1+2b_2(c_2-c_3) + 2c_3))) - 2x^2(-1+b_2+b_3)(b_2+b_3+ya_{3,2}b_3- \\
&\quad 2b_2c_2-2ya_{3,2}b_3c_2+2ya_{3,2}b_3^2c_2-2b_3c_3- \\
&\quad 2ya_{3,2}b_3^2c_3+a_{2,2}(-2(-1+b_2+b_3)+y(2a_{3,3}(-1+b_2 \\
&\quad +b_3)+b_3(-1+2b_2(c_2-c_3)+2c_3))) - a_{3,3}(2(-1+b_3)+ \\
&\quad b_2(2+y(1+2(-1+b_3)c_2-2b_3c_3)))) + y(-4+ \\
&\quad 4ya_{3,2}b_3^3(c_2-c_3)(1+yc_2^2+(-1+ya_{2,2})c_3-c_2(-1+ \\
&\quad y(a_{2,2}+c_3))) + 2b_2^2(-2+y(-2c_2^2(-1+b_3(1+a_{3,3}- \\
&\quad c_3)) - 2b_3(a_{3,3}-c_3)(-1+c_3)c_3+a_{2,2}(1+2(-1+b_3)c_2 \\
&\quad -2b_3c_3)-c_2(1+2a_{3,3}b_3(1-2c_3)+4b_3(-1+c_3)c_3))) + \\
&\quad b_3(8+y^2a_{3,2}(a_{2,2}-c_2)(-1+2c_2)(c_2-c_3)(-3+2c_3)+ \\
&\quad y(a_{3,2}(-1+2c_2)(3+2c_2-4c_3) - (a_{3,3}-c_3)(3-8c_3+ \\
&\quad 4c_3^2))) + 2b_3^2(-2-y^2a_{3,2}(a_{2,2}-c_2)(c_2^2(-5+2c_3)+ \\
&\quad c_2(1+8c_3-4c_3^2)+c_3(-1-3c_3+2c_3^2)) + y(-((a_{3,3}- \\
&\quad c_3)(-1+2c_3)) + a_{3,2}(1-4c_2^2+2c_3-4c_3^2+c_2(-4+ \\
&\quad 8c_3)))) + b_2(8-8b_3-2y^2a_{3,2}b_3(a_{2,2}-c_2)(1+2(-1+ \\
&\quad b_3)c_2-2b_3c_3)(c_2^2+c_2(1-2c_3)+(-1+c_3)c_3)+ \\
&\quad y(2a_{3,3}b_3+3c_2-2b_3c_2+8a_{3,3}b_3c_2-4a_{3,3}b_3^2c_2- \\
&\quad 8c_2^2+12b_3c_2^2-4b_3^2c_2^2+4c_3^3-8b_3c_2^3+4b_3^2c_2^3- \\
&\quad -2b_3c_3-12a_{3,3}b_3c_3+4a_{3,3}b_3^2c_3-16b_3c_2c_3- \\
&\quad 8a_{3,3}b_3c_2c_3+8b_3^2c_2c_3+8b_3c_2^2c_3-8b_3^2c_2^2c_3+ \\
&\quad 12b_3c_3^2+8a_{3,3}b_3c_3^2-4b_3^2c_3^2+8b_3c_2c_3^2+ \\
&\quad 4b_3^2c_2c_3^2-8b_3c_3^3+2a_{3,2}b_3(1+2c_2-2c_3)(1+2(-1+ \\
&\quad b_3)c_2-2b_3c_3) + a_{2,2}(-3+8c_2-4c_2^2-4b_3^2(c_2^2+ \\
&\quad c_3(1+c_3)-c_2(1+2c_3)) + 2b_3(1+4c_2^2+4c_3-2c_2(3+ \\
&\quad 2c_3)))) + x(-4(-1+b_2+b_3)^2+2y(-1+b_2+b_3)(-b_2-b_3+ \\
&\quad 2a_{2,2}(-1+b_2+b_3)+2a_{3,3}(-1+b_2+b_3)+2b_2c_2+ \\
&\quad 2b_3c_3)+y^2((1+2(-1+b_3)c_2-2b_3c_3)(a_{3,3}b_2c_2(-3+2b_2 \\
&\quad +2c_2+b_3(2-2c_2+2c_3))+a_{3,2}b_3(2(-1+b_3)c_2^2+2(-1+ \\
&\quad b_2+b_3)(-1+c_3)c_3+c_2(1-2(-1+b_2+2b_3)c_3))) + \\
&\quad a_{2,2}(-(b_3(c_3(-1+2b_2(c_2-c_3)+2c_3)(-3+2b_3+2b_2(1+ \\
&\quad c_2-c_3)+2c_3)+2a_{3,2}(-1+b_2+b_3)(c_2-c_3)(1+2(-1+ \\
&\quad b_3)c_2-2b_3c_3))) + a_{3,3}(b_3(-1+2c_3)(-3+2b_3+2c_3)+ \\
&\quad b_2^2(-2+4b_3c_2^2+4b_3c_3^2+c_2(4-8b_3c_3))+b_2(3-8c_2+ \\
&\quad 4c_2^2+4b_3^2(c_2-c_3)^2+4b_3(-1+c_2-2c_2^2+c_3+4c_2c_3 \\
&\quad -2c_3^2))))))
\end{aligned} \tag{3.21}$$

$$\begin{aligned}
a_0 &= \frac{1}{(4(-1+b_2+b_3)^2)} (y(-2x^2(-1+b_2+b_3)((a_{3,3}b_2-a_{3,2}b_3)(1+2(-1+ \\
&\quad b_3)c_2-2b_3c_3)) + a_{2,2}(2a_{3,3}(-1+b_2+b_3) + b_3(-1+ \\
&\quad 2b_2(c_2-c_3) + 2c_3))) + b_2(8-8b_3-y^2b_3(c_2-c_3)(1+2(-1 \\
&\quad +b_3)c_2-2b_3c_3)(c_2-4a_{3,2}c_2+2a_{3,2}b_3c_2+a_{3,3}(1- \\
&\quad 2c_3)-c_3+2a_{3,2}c_3-2a_{3,2}b_3c_3-2c_2c_3+2c_3^2+ \\
&\quad a_{2,2}(-1+2a_{3,2}+2c_3)) + y(1-2c_2+4(a_{3,2}- \\
&\quad a_{3,3})b_3^2(c_2-c_3) + 2b_3(-1+a_{3,2}(1-2c_2)+c_2+ \\
&\quad a_{3,3}(1+2c_2-4c_3)+c_3) + 2a_{2,2}(-1+b_3)(1+2(-1+ \\
&\quad b_3)c_2-2b_3c_3))) - b_2^2(4+2y^2b_3(c_2-c_3)^2(a_{2,2}- \\
&\quad a_{3,3}-c_2+c_3)(1+2(-1+b_3)c_2-2b_3c_3) + y(1+(-2+ \\
&\quad 4a_{3,3}b_3)c_2-4a_{3,3}b_3c_3+a_{2,2}(-2-4(-1+b_3)c_2+ \\
&\quad 4b_3c_3))) + (-1+b_3)(4+2ya_{3,2}b_3^2(2+y(1-2a_{2,2}+2c_2 \\
&\quad -2c_3)(c_2-c_3))(c_2-c_3) - b_3(4+y^2a_{3,2}(-1+2c_2)(1- \\
&\quad 2a_{2,2}+2c_2-2c_3)(c_2-c_3) + y(a_{3,2}(-2+4c_2) + (-1+ \\
&\quad 2a_{3,3})(-1+2c_3)))) + x(-1+b_2+b_3)(-2b_2-2b_3- \\
&\quad ya_{3,2}b_3+4b_2c_2+2ya_{3,2}b_3c_2-2ya_{3,2}b_3^2c_2+4b_3c_3 \\
&\quad +2ya_{3,2}b_3^2c_3+a_{3,3}(4(-1+b_3)+b_2(4+y(1+2(-1+ \\
&\quad b_3)c_2-2b_3c_3))) + a_{2,2}(-4+b_3(4+y(-1+2a_{3,3})(-1+ \\
&\quad 2c_3)) + 2b_2(2+y(a_{3,3}(-1+2c_2)+b_3(-c_2+c_3))))))
\end{aligned} \tag{3.22}$$

Applicando la tecnica descritta nel paragrafo (§3.4 ) e verificando mediante il calcolo simbolico abbiamo ottenuto un metodo  $V_0(\bar{\alpha})$ -stabile con angolo  $\bar{\alpha} = 82,36^\circ$  con parametri:

$$b_2 = \frac{158}{99}, \quad b_3 = \frac{47}{53}, \quad c_2 = \frac{95}{168}, \quad c_3 = \frac{155}{132}, \quad a_{2,2} = \frac{87}{91}$$

$$a_{3,2} = \frac{29}{60}, \quad a_{3,3} = \frac{110}{93}$$

Il cui grafico del Boundary Locus è rappresentato in figura:

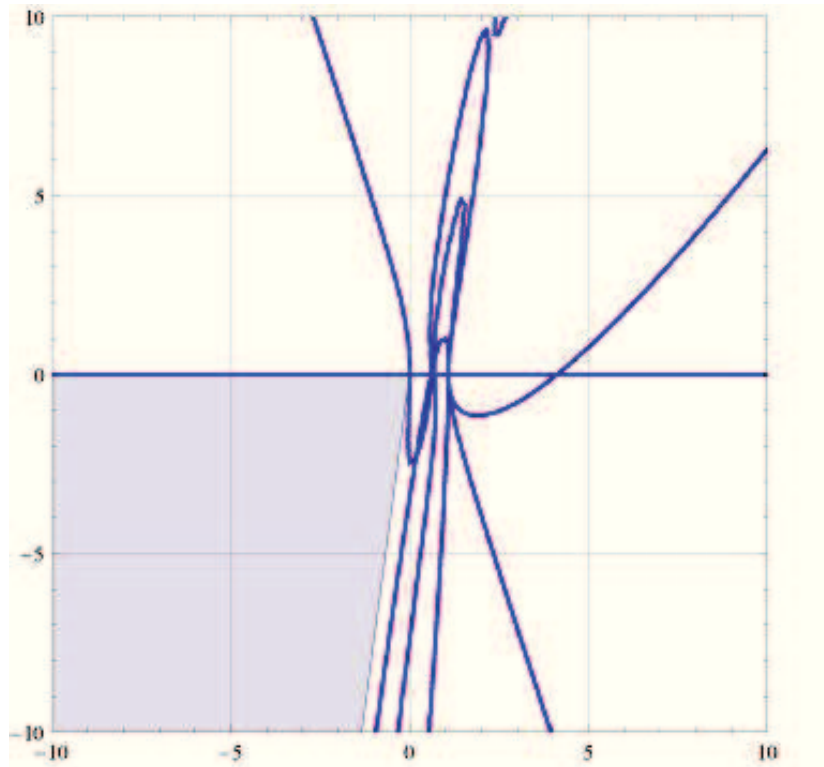


Figura 3.10: BL Metodo PVRK  $m=3$   $p=2$  con matrice LT con retta  $y=\tan[82.36^\circ] x$

La figura, ottenuta utilizzando il calcolo simbolico, rappresenta il grafico Boundary Locus del metodo considerato. La parte in grigio indica la regione di  $V_0(\alpha)$ -stabilità con angolo  $\alpha = 82.36^\circ$ .

### 3.5.5 Caso p=m-1=3

In questo caso abbiamo considerato una matrice  $\mathbf{A}$  a struttura diagonalmente implicita [34], cioè della forma:

$$A = \begin{bmatrix} \lambda & 0 & 0 & 0 \\ a_{2,1} & \lambda & 0 & 0 \\ a_{3,1} & a_{3,2} & \lambda & 0 \\ a_{4,1} & a_{4,2} & a_{4,3} & \lambda \end{bmatrix} \quad \text{con} \quad b = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ b_4 \end{bmatrix}, \quad c = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \\ c_4 \end{bmatrix}.$$

L'uso di matrici di questa forma dà dei vantaggi a livello computazionale ([33]). Imponendo le condizionin d'ordine tabella (2.1) abbiamo ottenuto la seguente famiglia a due parametri  $b_4, c_1, c_2, c_3, c_4, a_{4,2}, a_{4,3}$  di ordine  $p = 3$ :

$$\begin{aligned} \lambda &= c_1 \\ a_{2,1} &= -c_1 + c_2 \\ a_{3,1} &= \frac{\alpha}{((c_1 - c_2)(-2 + 6b_4c_4^2 + c_2(3 - 6b_4c_4) + c_1(3 + 6(-1 + b_4)c_2 - 6b_4c_4)))} \\ a_{3,2} &= -\frac{\beta}{((c_1 - c_2)(-2 + 6b_4c_4^2 + c_2(3 - 6b_4c_4) + c_1(3 + 6(-1 + b_4)c_2 - 6b_4c_4)))} \\ a_{4,1} &= -a_{4,2} - a_{4,3} - c_1 + c_4 \\ a_{4,2} &= a_{4,2} \\ a_{4,3} &= a_{4,3} \end{aligned} \quad (3.23)$$

con

$$\begin{aligned} \alpha &= ((c_1 - c_3)(c_3 - 6a_{4,3}b_4c_3^2 + c_1^2(-3 + 6c_3 - 6b_4(c_2 - c_4)) + c_2^2(3 + 6a_{4,2}b_4 - 6b_4c_4) + c_1(2 - 6(-1 + a_{4,2}b_4 + a_{4,3}b_4)c_2 + 6(-1 + b_4)c_2^2 + 6(-1 + a_{4,2}b_4 + a_{4,3}b_4)c_3 - 6b_4c_4^2) + c_2(-3 - 6a_{4,2}b_4c_3 + 6a_{4,3}b_4c_3 + 6b_4c_4^2))) \\ \beta &= (c_1 - c_3)(c_2 - c_3)(1 + 6(-1 + a_{4,2}b_4 + a_{4,3}b_4)c_1 + 6c_1^2 - 6a_{4,2}b_4c_2 - 6a_{4,3}b_4c_3)) \end{aligned} \quad (3.24)$$

$$b = \begin{bmatrix} \frac{(2 - 6b_4c_4^2 + c_3(-3 + 6b_4c_4) + c_2(-3 - 6(-1 + b_4)c_3 + 6b_4c_4))}{(6(c_1 - c_2)(c_1 - c_3))} \\ \frac{(-2 + 6b_4c_4^2 + c_3(3 - 6b_4c_4) + c_1(3 + 6(-1 + b_4)c_3 - 6b_4c_4))}{(6(c_1 - c_2)(c_2 - c_3))} \\ \frac{(-2 + 6b_4c_4^2 + c_2(3 - 6b_4c_4) + c_1(3 + 6(-1 + b_4)c_2 - 6b_4c_4))}{(6(c_1 - c_3)(-c_2 + c_3))} \\ b_4 \end{bmatrix},$$



$$c = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \\ c_4 \end{bmatrix}.$$

Il polinomio di stabilità  $p(w, x, y)$  della famiglia di metodi rispetto all'equazione test di convoluzione (2.36) è:

$$p(w, x, y) = a_2(w - 1)^2 + a_1(w - 1) + a_0;$$

Per semplicità di notazione la forma esplicita dei coefficienti  $a_2, a_1, a_0$  non viene di seguito riportata ma si osserva che  $a_2$  è polinomio di quarto grado in  $x$ ;  $a_1$  è un polinomio di quarto grado in  $x$  e  $y$  e  $a_0$  è un polinomio di terzo grado in  $x$  e di quarto grado in  $y$ .

Applicando la tecnica descritta nel paragrafo (§3.4) e verificando mediante il calcolo simbolico abbiamo determinato un metodo  $V_0(\bar{\alpha})$ -stabile con angolo  $\bar{\alpha} = 82,28^\circ$  con parametri:

$$\begin{aligned} b_4 &= -\frac{52}{119}, & c_1 &= \frac{11}{8}, & c_2 &= \frac{157}{146}, & c_3 &= \frac{29}{54} \\ c_4 &= \frac{24}{49}, & a_{4,2} &= \frac{27}{34}, & a_{4,3} &= \frac{134}{109} \end{aligned}$$

Il polinomio di stabilità  $p(w, x, y)$  di tale metodo è:

$$\begin{aligned}
p(w, x, y) = & 1 + \frac{(w^2(8-11x)^4)}{4096} - \frac{(629x^3)}{384} - \frac{(2270261655319409882567489x^4)}{1371113175282763285426176} \\
& + \frac{(1025803754378441y^2)}{14726167393752864} + \frac{(2439353041678157722082978379692785y^3)}{36862592160303588598598515917975552} \\
& + \frac{(1345375725522035188891166102891803281875y^4)}{2174176512979272707289867700369171314688} + x^2 \left( \frac{203}{32} + \frac{(25393736533698306612939734577893663131y^2)}{35093187736609016345865787153912725504} \right) \\
& + x \left( -\frac{9}{2} - \frac{(1347766949194379312243380458086075y^2)}{2225595366350140559732736374550528} - \frac{(4757460380927506802148942985382171645y^3)}{35093187736609016345865787153912725504} \right) \\
& + w \left( -2 - \frac{(1315365754287919236197291x^4)}{685556587641381642713088} - y - \frac{(2252984370524513y^2)}{14726167393752864} \right) \\
& - \frac{(9096800842888280140681597509380375y^3)}{89523438103594429453739252943654912} - \frac{(1460991504531298160609703125y^4)}{2663278339489332702259155499008} \\
& + x^3 \left( \frac{2311}{192} + \frac{(896406852401832279691195y)}{171389146910345410678272} + \right. \\
& \left. x^2 \left( -\frac{283}{16} - \frac{841y}{96} - \frac{(59060087488288665642638385594266502595y^2)}{35093187736609016345865787153912725504} \right) \right. \\
& \left. + x(10 + 5y + \frac{(3101505745519820284818698236558307y^2)}{2225595366350140559732736374550528} + \frac{(110213785983060093020280216118598125y^3)}{716187504828755435629914023549239296}) \right)
\end{aligned}$$

Il cui grafico del Boundary Locus è rappresentato in figura:

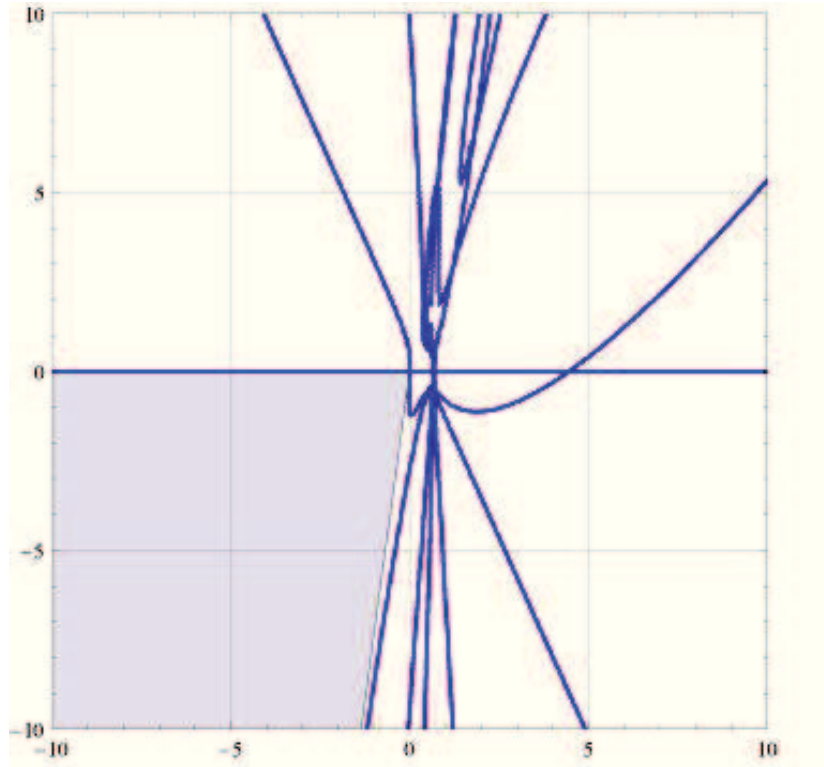


Figura 3.11: BL Metodo PVRK m=4 p=3 con matrice a struttura diagonalmente implicita con retta  $y=\tan[82.28^\circ] x$

La figura, ottenuta utilizzando il calcolo simbolico, rappresenta il grafico Boundary Locus del metodo considerato. La parte in grigio indica la regione di  $V_0(\alpha)$ -stabilità con angolo  $\alpha = 82.28^\circ$ .

### 3.5.6 Caso $p=m+1=3$

In questo caso abbiamo considerato una matrice  $\mathbf{A}$  a struttura triangolare inferiore, cioè della forma:

$$A = \begin{bmatrix} a_{1,1} & 0 \\ a_{2,1} & a_{2,2} \end{bmatrix} \quad \text{con} \quad b = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix}, \quad c = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix}.$$

L'uso di matrici di questa forma dà dei vantaggi a livello computazionale ([33]). Imponendo le condizioni d'ordine tabella (2.1) abbiamo ottenuto la seguente famiglia ad un parametro  $c_1$  di ordine  $p = 3$ :

$$A = \begin{bmatrix} c_1 & 0 \\ \frac{1}{3-6c_1} & \frac{1-3c_1}{3-6c_1} \end{bmatrix} \quad b = \begin{bmatrix} \frac{1}{4-12c_1+12c_1^2} \\ \frac{3(1-2c_1)^2}{4(1-3c_1+3c_1^2)} \end{bmatrix} \quad c = \begin{bmatrix} c_1 \\ \frac{2-3c_1}{3-6c_1} \end{bmatrix}$$

Il polinomio di stabilità  $p(w, x, y)$  della famiglia di metodi rispetto all'equazione test di convoluzione (2.36) è:

$$p(w, x, y) = a_2(w-1)^2 + a_1(w-1) + a_0;$$

$$\begin{aligned} a_2 &= \frac{(-3+x+6c_1-6xc_1^2+x^2c_1(-1+3c_1))}{(-3+6c_1)} \\ a_1 &= \frac{(3x^2(1-6c_1+12c_1^2)+y(18+y-36c_1-6yc_1^2)+3x(6+y-12c_1-6yc_1+12yc_1^2))}{(-18+36c_1)} \\ a_0 &= -\frac{(y((12+y)(-1+2c_1)-2x(1-6c_1+12c_1^2)))}{(-12+24c_1)} \end{aligned} \quad (3.25)$$

Applicando la tecnica descritta nel paragrafo (§3.4) e verificando mediante il calcolo simbolico abbiamo determinato parecchi metodi  $V_0(\bar{\alpha})$ -stabili con angolo  $\bar{\alpha} = 19,99^\circ$ , un esempio di metodo si ottiene scegliendo come parametro:

$$c_1 = \frac{51}{65}$$

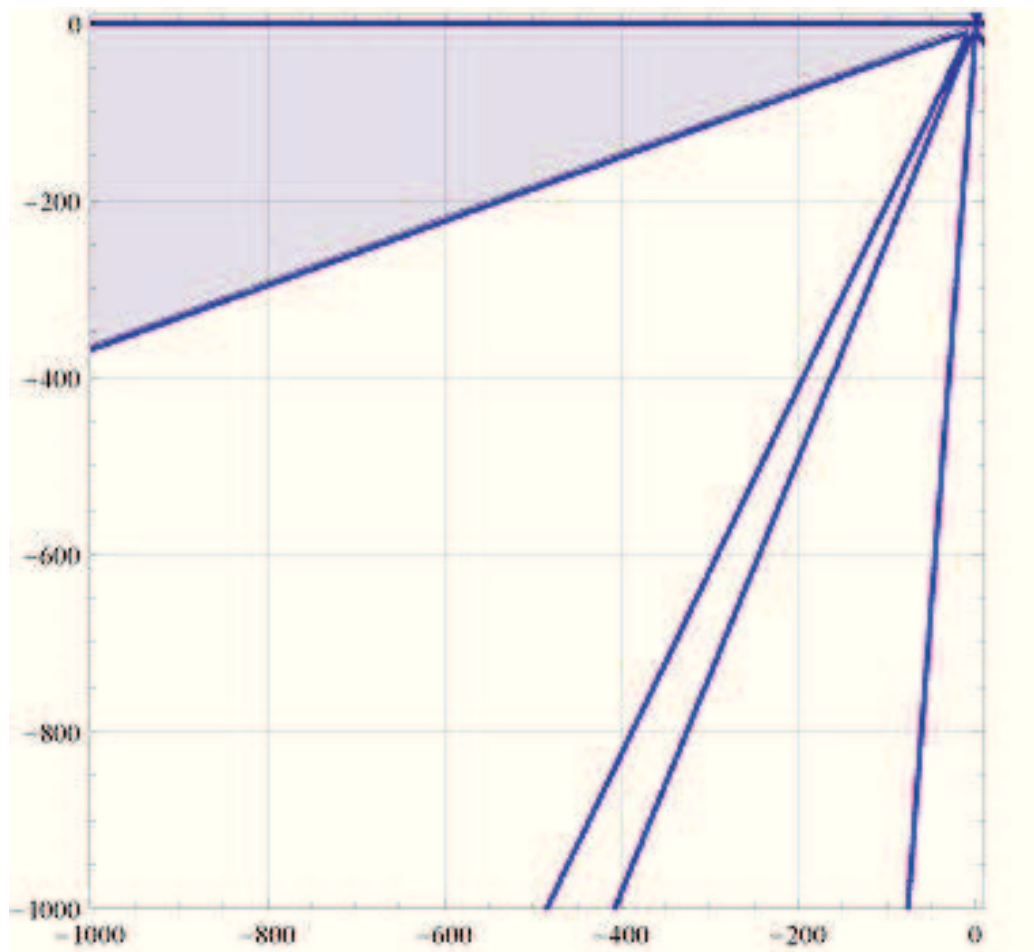


Figura 3.12: BL Metodo PVRK  $m=2$   $p=3$  con matrice LT con retta  $y=\tan[19.99^\circ] x$

La figura, ottenuta utilizzando il calcolo simbolico, rappresenta il grafico Boundary Locus del metodo considerato. La parte in grigio indica la regione di  $V_0(\alpha)$ -stabilità con angolo  $\alpha = 19.99^\circ$ .

### 3.5.7 Caso $p=m+1=4$

In questo caso abbiamo considerato una matrice  $\mathbf{A}$  a struttura triangolare inferiore, cioè della forma:

$$A = \begin{bmatrix} a_{1,1} & 0 & 0 \\ a_{2,1} & a_{2,2} & 0 \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} \end{bmatrix} \quad \text{con} \quad b = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix}, \quad c = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{bmatrix}.$$

L'uso di matrici di questo tipo dà vantaggi a livello computazionale ([33]).

Imponendo le condizioni d'ordine tabella (2.1) abbiamo ottenuto la seguente famiglia a due parametri  $c_1, a_{3,3}$  di ordine  $p = 4$ :

$$A = \begin{bmatrix} c_1 & 0 & 0 \\ \frac{(1-4a_{3,3})}{(4(1-3c_1+a_{3,3}(-3+6c_1)))} & \frac{(1-4c_1+4a_{3,3}(-1+3c_1))}{(4(1-3c_1+a_{3,3}(-3+6c_1)))} & 0 \\ \frac{\alpha}{\beta} & \frac{\gamma}{\delta} & a_{3,3} \end{bmatrix}$$

$$\alpha = (9a_{3,3}^3(1-2c_1)^2(-1+4c_1) + c_1(-1+7c_1-9c_1^2) + a_{3,3}^2(7-63c_1+192c_1^2-180c_1^3) + a_{3,3}(-1+14c_1-63c_1^2+72c_1^3))$$

$$\beta = ((1-6c_1+6c_1^2)(-1+4c_1-6c_1^2+4a_{3,3}(1-3c_1+3c_1^2)))$$

$$\gamma = -(((1-a_{3,3}+c_1)(-1+4c_1)(1-3c_1+a_{3,3}(-3+6c_1)))^2)$$

$$\delta = ((1-6c_1+6c_1^2)(-1+4c_1-6c_1^2+4a_{3,3}(1-3c_1+3c_1^2)))$$

$$b = \begin{bmatrix} \frac{(1-6a_{3,3}+6a_{3,3}^2)}{(6(-1+a_{3,3}+c_1)(-1+4c_1-6c_1^2+4a_{3,3}(1-3c_1+3c_1^2)))} \\ \frac{(2(1-3c_1+a_{3,3}(-3+6c_1))^3)}{(3(1-8c_1+22c_1^2-24c_1^3)+a_{3,3}^2(22-132c_1+276c_1^2-216c_1^3)+24a_{3,3}^3(-1+5c_1-9c_1^2+6c_1^3)+4a_{3,3}(-2+14c_1-33c_1^2+30c_1^3)))} \\ \frac{(1-6c_1+6c_1^2)}{(6(-1+a_{3,3}+c_1)(-1+a_{3,3}(4-12c_1)+4c_1+6a_{3,3}^2(-1+2c_1)))} \end{bmatrix}$$

$$c = \begin{bmatrix} \frac{c_1}{(2-6c_1+6a_{3,3}(-1+2c_1))} \\ \frac{(1-2c_1+a_{3,3}(-4+6c_1))}{1-a_{3,3}} \end{bmatrix}$$

Il polinomio di stabilità  $p(w, x, y)$  della famiglia di metodi rispetto all'equazione test di convoluzione (2.36) è:

$$p(w, x, y) = a_2(w-1)^2 + a_1(w-1) + a_0;$$

$$\begin{aligned}
a_2 &= \frac{-((-1+xa_{3,3})(-1+xc_1)(4(-1+a_{3,3}(3-6c_1)+3c_1)+x(1-4c_1+4a_{3,3}(-1+3c_1))))}{(4(1-3c_1+a_{3,3}(-3+6c_1)))} \\
a_1 &= \frac{1}{(96(1-3c_1+a_{3,3}(-3+6c_1)))} - (4x^3(1-6a_{3,3}+12a_{3,3}^2)(1-6c_1+12c_1^2) + 4x^2(y(1-6a_{3,3}+12a_{3,3}^2)(1-6c_1+12c_1^2) - 6(-1+6a_{3,3}(1-2c_1)^2 + 6c_1-12c_1^2+12a_{3,3}^2(-1+2c_1))) + \\
&\quad y(y^2(-1+4a_{3,3})(a_{3,3}+c_1)(-1+4c_1) + 96(1-3c_1+a_{3,3}(-3+6c_1)) + 8y(1-3c_1+a_{3,3}(-3+6c_1))) \\
&\quad + x(-24y(-1+6a_{3,3}(1-2c_1)^2 + 6c_1-12c_1^2+12a_{3,3}^2(-1+2c_1)) + 96(1-3c_1+a_{3,3}(-3+6c_1)) + y^2((1-2c_1)^2 + a_{3,3}^2(4+72c_1-192c_1^2) + a_{3,3}(-4-8c_1+72c_1^2)))) \\
a_0 &= \frac{1}{(288(1-3c_1+a_{3,3}(-3+6c_1)))} (y(-12x^2(1-6a_{3,3}+12a_{3,3}^2)(1-6c_1+12c_1^2) + 6x(12+ \\
&\quad y)(-1+6a_{3,3}(1-2c_1)^2 + 6c_1-12c_1^2+12a_{3,3}^2(-1+2c_1)) - 288(1-3c_1+a_{3,3}(-3+6c_1)) - 24y(1-3c_1+a_{3,3}(-3+6c_1)) + y^2((1-6c_1)^2 + 36a_{3,3}^2(1-6c_1+8c_1^2) - 12a_{3,3}(1-8c_1+18c_1^2)))) \\
&\hspace{15em} (3.26)
\end{aligned}$$

Applicando la tecnica descritta nel paragrafo (§3.4) e verificando mediante il calcolo simbolico abbiamo determinato parecchie coppie di metodi  $V_0(\bar{\alpha})$ -stabili con angolo  $\bar{\alpha} = 30,63^\circ$ , un esempio di metodo si ottiene scegliendo come parametri:

$$c_1 = \frac{79}{67}, \quad a_{3,3} = \frac{119}{100}$$

La figura, ottenuta utilizzando il calcolo simbolico, rappresenta il grafico Boundary Locus del metodo considerato. La parte in grigio indica la regione di  $V_0(\alpha)$ -stabilità con angolo  $\alpha = 30.63^\circ$ .



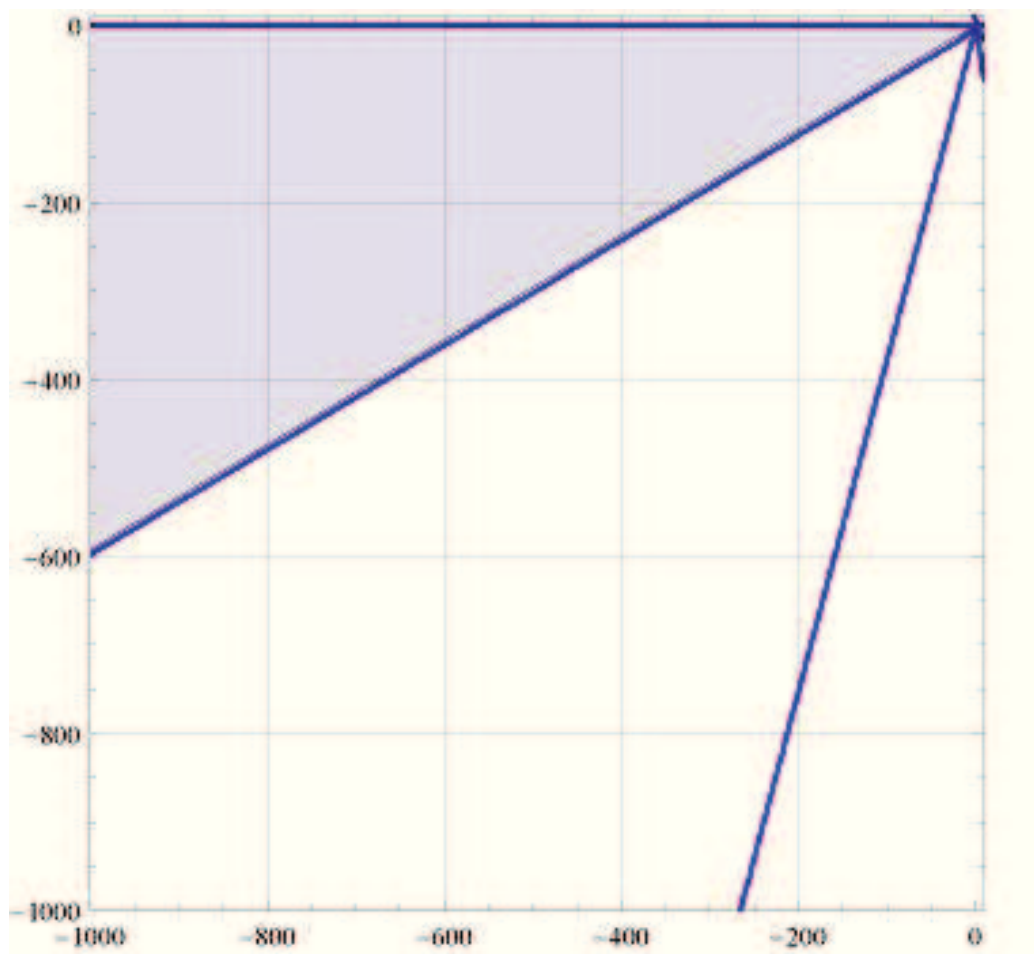


Figura 3.13: BL Metodo PVRK  $m=3$   $p=4$  con matrice LT con retta  $y=\tan[30.63^\circ] x$

## 3.6 Costruzione di metodi BVRK

### 3.6.1 Caso m=3; p=3; d<sub>1</sub>=1; d<sub>3</sub>=1

In questo caso abbiamo considerato una matrice **A** a struttura diagonalmente implicita [34], cioè della forma:

$$A = \begin{bmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ a_{2,1} & \lambda & 0 \\ a_{3,1} & a_{3,2} & \lambda \end{bmatrix} \quad \text{con} \quad b = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix}, \quad c = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{bmatrix}, \quad d = \begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \end{bmatrix}.$$

L'uso di matrici di questa forma dà dei vantaggi a livello computazionale ([33]). Imponendo le condizionin d'ordine tabella (2.1) abbiamo ottenuto la seguente famiglia a due parametri  $c_2, c_3$  di ordine  $p = 3$ :

$$A = \begin{bmatrix} \frac{(2-3c_3)}{(3-6c_3)} & 0 & 0 \\ \frac{(2-3c_3+c_2(-3+6c_3))}{(-3+6c_3)} & \frac{(2-3c_3)}{(3-6c_3)} & 0 \\ \frac{(2(-1+c_2+c_3)(1-3c_3+3c_3^2))}{(2-3c_3+c_2(-3+6c_3))} & \frac{(-2(1-9c_3+27c_3^2-36c_3^3+18c_3^4))}{(3(-1+2c_3)(2-3c_3+c_2(-3+6c_3)))} & \frac{(2-3c_3)}{(3-6c_3)} \end{bmatrix}$$

$$b = \begin{bmatrix} \frac{(3(1-2c_3)^2)}{(4(1-3c_3+3c_3^2))} \\ 0 \\ \frac{1}{(4-12c_3+12c_3^2)} \end{bmatrix} \quad c = \begin{bmatrix} \frac{(2-3c_3)}{(3-6c_3)} \\ c_2 \\ c_3 \end{bmatrix} \quad d = \begin{bmatrix} 1 \\ \frac{(-1+3c_2(1-2c_3)^2+c_3)}{(1-6c_3+6c_3^2)} \\ 1 \end{bmatrix}$$

Il polinomio di stabilità  $p(w, x, y)$  della famiglia di metodi rispetto all'equazione test di convoluzione (2.36) è:

$$p(w, x, y) = a_2(w-1)^2 + a_1(w-1) + a_0$$

$$a_2 = \frac{1}{(81(1-2c_3)^4(1-6c_3+6c_3^2))}((-3+x(2-3c_3)+6c_3+y(2-5c_3+3c_3^2))(-9(1-2c_3)^2+3x(2-7c_3+6c_3^2)+y(2-9c_3+9c_3^2))(3-24c_3+54c_3^2-36c_3^3+x(-2+15c_3-30c_3^2+18c_3^3)+y(-2+3c_3)(-1+c_3+c_2(2-6c_3+6c_3^2)))) \quad (3.27)$$

$$\begin{aligned}
a_1 = & \frac{1}{(162(1-2c_3)^4(1-6c_3+6c_3^2))}(-27x^3(1-2c_3)^2(3-25c_3+64c_3^2-66c_3^3+24c_3^4)+ \\
& y(-162(1-2c_3)^4(1-6c_3+6c_3^2)+y^2(-67+549c_3-1725c_3^2 \\
& +2610c_3^3-1908c_3^4+540c_3^5)(-1+c_3+c_2(2-6c_3+ \\
& 6c_3^2))+9y(1-2c_3)^2(2-97c_3+504c_3^2-984c_3^3+828c_3^4 \\
& -252c_3^5+2c_2(13-87c_3+225c_3^2-270c_3^3+126c_3^4))) - \\
& 3x^2(-1+2c_3)(-27(1-2c_3)^2(-3+22c_3-42c_3^2+24c_3^3)+ \\
& y(-25+432c_3-2079c_3^2+4446c_3^3-4716c_3^4+2376c_3^5- \\
& 432c_3^6+18c_2(-3+22c_3-66c_3^2+101c_3^3-78c_3^4+ \\
& 24c_3^5))) + x(-162(1-2c_3)^4(1-6c_3+6c_3^2)+9y(1- \\
& 2c_3)^2(31-366c_3+1320c_3^2-1980c_3^3+1224c_3^4-216c_3^5+ \\
& 12c_2(2-13c_3+33c_3^2-39c_3^3+18c_3^4))+y^2(89-309c_3- \\
& 1347c_3^2+9540c_3^3-22014c_3^4+25056c_3^5-14256c_3^6+ \\
& 3240c_3^7+12c_2(-26+262c_3-1125c_3^2+2661c_3^3-3717c_3^4+ \\
& 3024c_3^5-1296c_3^6+216c_3^7)))) \tag{3.28}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
a_0 = & \frac{1}{(36(-1+2c_3)^3(1-6c_3+6c_3^2))}(y(-36(-1+2c_3)^3(1-6c_3+6c_3^2)-6x^2(-3+31c_3-114c_3^2+ \\
& 194c_3^3-156c_3^4+48c_3^5)+y^2(15-89c_3+182c_3^2-156c_3^3 \\
& +48c_3^4)(-1+c_3+c_2(2-6c_3+6c_3^2))+y(-1+2c_3)(5- \\
& 198c_3+990c_3^2-1872c_3^3+1512c_3^4-432c_3^5+24c_2(2- \\
& 13c_3+33c_3^2-39c_3^3+18c_3^4))+x(-3+4c_3)(18(1-2c_3)^2(1 \\
& -6c_3+6c_3^2)+y(-1+c_3)(-1-30c_3+138c_3^2-180c_3^3+ \\
& 72c_3^4-12c_2(-1+5c_3-9c_3^2+6c_3^3)))))) \tag{3.29}
\end{aligned}$$

Applicando la tecnica descritta nel paragrafo (§3.4) e verificando mediante il calcolo simbolico abbiamo determinato parecchie coppie di metodi  $V_0(\bar{\alpha})$ -stabili con angolo  $\bar{\alpha} = 89,70^\circ$ , un esempio di metodo si ottiene scegliendo come parametri:

$$c_2 = \frac{345}{43}, \quad c_3 = -\frac{2749}{202}$$

Il grafico del Boundary Locus è rappresentato in figura:

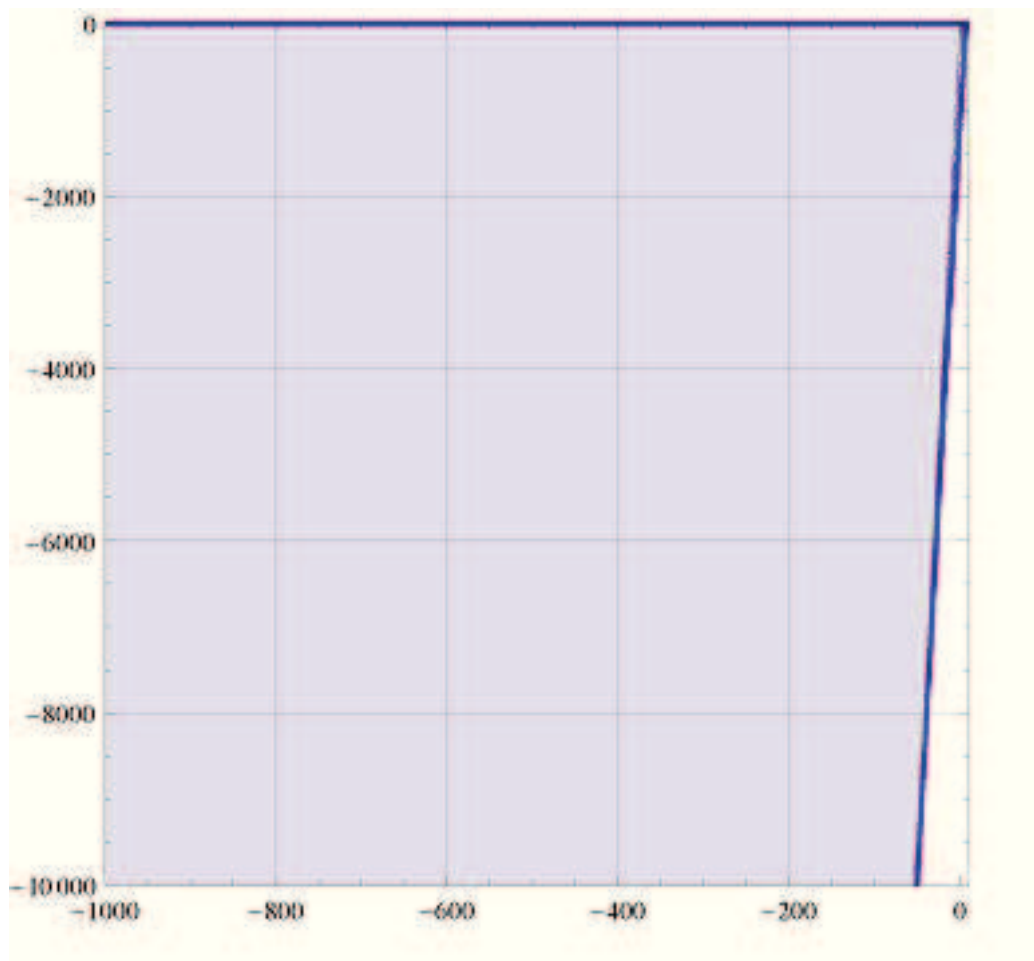


Figura 3.14: BL Metodo PVRK  $m=3$   $p=3$   $d_1 = d_3 = 1$  con matrice a struttura diagonalmente implicita con retta  $y=\tan[89.70^\circ] x$

La figura, ottenuta utilizzando il calcolo simbolico, rappresenta il grafico Boundary Locus del metodo considerato. La parte in grigio indica la regione di  $V_0(\alpha)$ -stabilità con angolo  $\alpha = 89.70^\circ$ .

In questo caso abbiamo considerato una matrice  $\mathbf{A}$  a struttura triangolare inferiore, cioè della forma:

$$A = \begin{bmatrix} a_{1,1} & 0 & 0 \\ a_{2,1} & a_{2,2} & 0 \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} \end{bmatrix}$$

$$\text{con } b = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix}, \quad c = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{bmatrix}, \quad d = \begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \end{bmatrix}.$$

L'uso di matrici di questo tipo dà vantaggi a livello computazionale ([33]).

Imponendo le condizioni d'ordine tabella (2.1) abbiamo ottenuto la seguente famiglia a quattro parametri  $c_2, c_3, a_{2,2}, a_{3,3}$  di ordine  $p = 3$ :

$$A = \begin{bmatrix} \frac{(2-3c_3)}{(3-6c_3)} & 0 & 0 \\ -a_{2,2} + c_2 & a_{2,2} & 0 \\ \frac{((-1+2c_3)(2-3a_{3,3}(c_2-c_3)+3(-2+c_2)c_3+3c_3^2))}{(2-3c_3+c_2(-3+6c_3))} & \frac{(-2(-1+a_{3,3}+c_3)(1-3c_3+3c_3^2))}{(2-3c_3+c_2(-3+6c_3))} & a_{3,3} \end{bmatrix}$$

$$b = \begin{bmatrix} \frac{(3(1-2c_3)^2)}{(4(1-3c_3+3c_3^2))} \\ 0 \\ \frac{1}{(4-12c_3+12c_3^2)} \end{bmatrix} \quad c = \begin{bmatrix} \frac{(2-3c_3)}{(3-6c_3)} \\ c_2 \\ c_3 \end{bmatrix} \quad d = \begin{bmatrix} 1 \\ \frac{(-1+3a_{3,3}+c_2(-3+6c_3))}{(3(-1+a_{3,3}+c_3))} \\ 1 \end{bmatrix}$$

Il polinomio di stabilità  $p(w, x, y)$  della famiglia di metodi rispetto all'equazione test di convoluzione (2.36) è:

$$p(w, x, y) = a_2(w-1)^2 + a_1(w-1) + a_0;$$

$$a_2 = \frac{1}{(27(1-2c_3)^2(-1+a_{3,3}+c_3))}((1-xa_{3,3}+ya_{3,3}(-1+c_3))(-3(-1+a_{3,3}+c_3)+3xa_{2,2}(-1+a_{3,3}+c_3)-ya_{2,2}(1+3a_{3,3}(-1+c_2)-3c_2c_3))(-9(1-2c_3)^2+3x(2-7c_3+6c_3^2)+y(2-9c_3+9c_3^2)))$$

$$a_1 = \frac{1}{(54(1-2c_3)^2(-1+a_{3,3}+c_3))} - (9x^3(-1+a_{3,3}+c_3)(-1+2c_3)(1-a_{3,3}-c_3+a_{2,2}(-1+6a_{3,3}(-1+2c_3))) + y(54(1-2c_3)^2(-1+a_{3,3}+c_3)+3y(6a_{2,2}(1-2c_3)^2(1+3a_{3,3}(-1+c_2)-3c_2c_3)+(-1+a_{3,3}+c_3)(-2+(11+3c_2)c_3-3(5+2c_2)c_3^2+6c_3^3+3a_{3,3}(-1+2c_3)(6+c_2-19c_3+12c_3^2))) + y^2(1+3a_{3,3}(-1+c_2)-3c_2c_3)(-((-1+a_{3,3}+c_3)(1-4c_3+3c_3^2)) + a_{2,2}(-1+4c_3-3c_3^2+a_{3,3}(-16+87c_3-144c_3^2+72c_3^3)))) - 3x^2(3(-1+a_{3,3}+c_3)(-1+2c_3)(-1+6a_{2,2}(-1+2c_3)+6a_{3,3}(-1+2c_3)) + y(-((-1+a_{3,3}+c_3)(-5+3(6+c_2)c_3-6(3+c_2)c_3^2+6c_3^3+a_{3,3}(7-18c_3+6c_3^2+c_2(-3+6c_3)))) + a_{2,2}(5-3(6+c_2)c_3+6(3+c_2)c_3^2-6c_3^3+18a_{3,3}^2(1-2c_3)^2(-3+c_2+c_3)+a_{3,3}(35-204c_3+396c_3^2-288c_3^3+72c_3^4+c_2(3-24c_3+72c_3^2-72c_3^3)))))) + x(54(1-2c_3)^2(-1+a_{3,3}+c_3)+3y(7+18a_{3,3}^2(1-2c_3)^2(-2+c_3)-31c_3+42c_3^2-18c_3^3+6a_{2,2}(1-2c_3)^2(4+3a_{3,3}(-2+c_2)-3(1+c_2)c_3)+a_{3,3}(29-174c_3+360c_3^2-288c_3^3+72c_3^4)) + y^2(-((-1+a_{3,3}+c_3)(7-3(9+4c_2)c_3+9(3+4c_2)c_3^2-9(1+2c_2)c_3^3+3a_{3,3}(-5+16c_3-9c_3^2+2c_2(2-6c_3+3c_3^2)))) + a_{2,2}(-7+3(9+4c_2)c_3-9(3+4c_2)c_3^2+9(1+2c_2)c_3^3+3a_{3,3}^2(52+18c_2(1-2c_3)^2(-2+c_3)-249c_3+360c_3^2-144c_3^3)-3a_{3,3}(23-141c_3+294c_3^2-240c_3^3+72c_3^4+4c_2(1-12c_3+42c_3^2-54c_3^3+18c_3^4))))))$$

$$a_0 = \frac{1}{(108(1-2c_3)^2(-1+a_{3,3}+c_3))} - (y(108(1-2c_3)^2(-1+a_{3,3}+c_3)+3y(5+36a_{3,3}^2(1-2c_3)^2(-1+c_3)-29c_3+48c_3^2-24c_3^3+12a_{2,2}(1-2c_3)^2(1+3a_{3,3}(-1+c_2)-3c_2c_3)+a_{3,3}(31-192c_3+444c_3^2-432c_3^3+144c_3^4))+18x^2(-1+a_{3,3}+c_3)(-1+2c_3)(1-a_{3,3}-c_3+a_{2,2}(-1+6a_{3,3}(-1+2c_3))) + y^2(1+3a_{3,3}(-1+c_2)-3c_2c_3)(5-18c_3+12c_3^2)(1-a_{3,3}-c_3+a_{2,2}(-1+6a_{3,3}(-1+2c_3))) - 3x(6(-1+a_{3,3}+c_3)(-1+2c_3)(-1+6a_{2,2}(-1+2c_3)+6a_{3,3}(-1+2c_3)) + y(1-a_{3,3}-c_3+a_{2,2}(-1+6a_{3,3}(-1+2c_3))) (-7+3(9+2c_2)c_3-6(5+2c_2)c_3^2+12c_3^3+a_{3,3}(11-36c_3+12c_3^2+6c_2(-1+2c_3))))))$$

(3.30)

Applicando la tecnica descritta nel paragrafo (§3.4 ) e verificando mediante il calcolo simbolico abbiamo determinato parecchie quaterne di metodi  $V_0(\bar{\alpha})$ -stabili con angolo  $\bar{\alpha} = 89,75^\circ$ , un esempio di metodo si ottiene scegliendo come parametri:

$$c_2 = \frac{355}{66}, \quad c_3 = -\frac{1147}{65}, \quad a_{2,2} = \frac{440}{111}, \quad a_{3,3} = \frac{1349}{141}$$

La figura, ottenuta utilizzando il calcolo simbolico, rappresenta il grafico Boundary Locus del metodo considerato. La parte in grigio indica la regione di  $V_0(\alpha)$ -stabilità con angolo  $\alpha = 89.75^\circ$ .



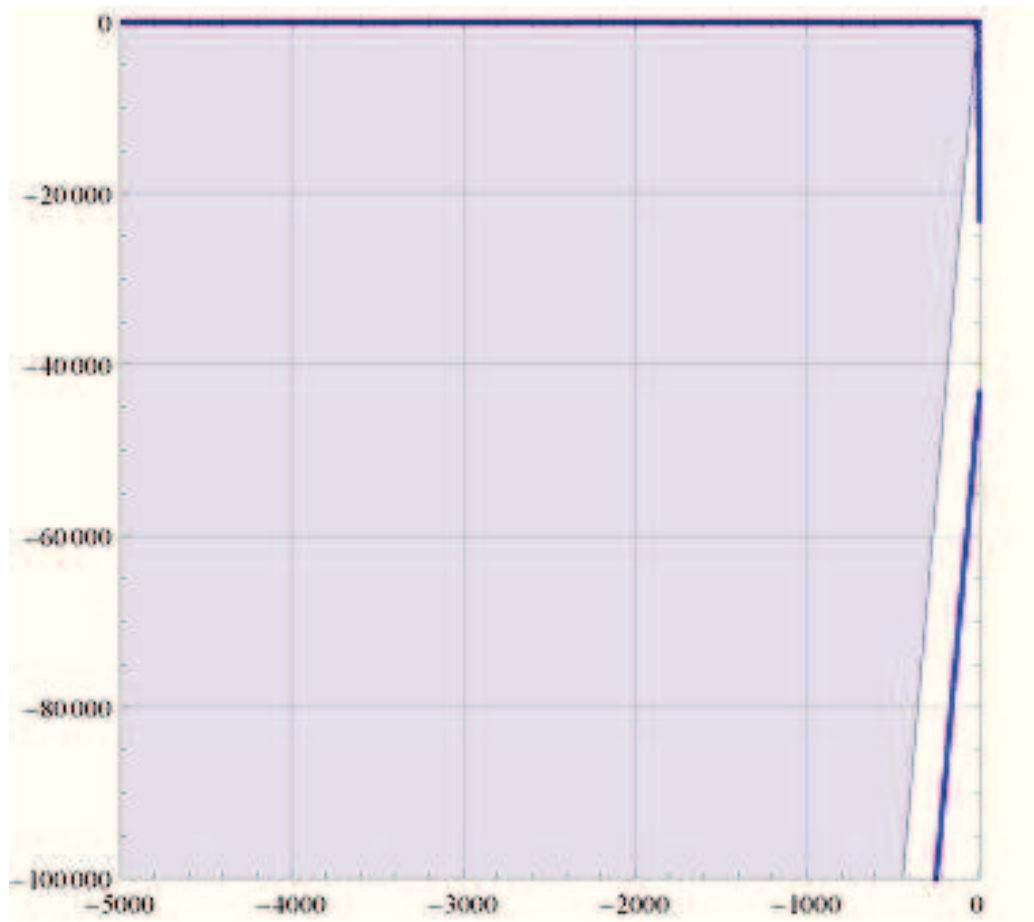


Figura 3.15: BL Metodo PVRK  $m=3$   $p=3$   $d_1 = d_3 = 1$  con matrice LT con retta  $y=\tan[89.75^\circ] x$

### 3.6.2 Caso m=3; p=3; d<sub>2</sub>=1; d<sub>3</sub>=1

In questo caso abbiamo considerato una matrice **A** a struttura diagonalmente implicita [34], cioè della forma:

$$A = \begin{bmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ a_{2,1} & \lambda & 0 \\ a_{3,1} & a_{3,2} & \lambda \end{bmatrix} \quad \text{con} \quad b = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix}, \quad c = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{bmatrix}, \quad d = \begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \end{bmatrix}.$$

L'uso di matrici di questa forma dà dei vantaggi a livello computazionale ([33]). Imponendo le condizionin d'ordine tabella (2.1) abbiamo ottenuto la seguente famiglia a due parametri  $c_1, c_3$  di ordine  $p = 3$ :

$$A = \begin{bmatrix} c_1 & 0 & 0 \\ \frac{(-2+c_1(3-6c_3)+3c_3)}{(-3+6c_3)} & c_1 & 0 \\ \frac{(-2+12c_3-21c_3^2+12c_3^3+9c_1^2(-1+2c_3)^3-2c_1(-5+30c_3-57c_3^2+36c_3^3))}{(2-3c_3+c_1(-3+6c_3))} & \frac{(-2(1-6c_1+6c_1^2)(-1+5c_3-9c_3^2+6c_3^3))}{(2-3c_3+c_1(-3+6c_3))} & c_1 \end{bmatrix}$$

$$b = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{(3(1-2c_3)^2)}{(4(1-3c_3+3c_3^2))} \\ (4-12c_3+12c_3^2)(-1) \end{bmatrix} \quad c = \begin{bmatrix} c_1 \\ \frac{(2-3c_3)}{(3-6c_3)} \\ c_3 \end{bmatrix} \quad d = \begin{bmatrix} \frac{(-1+6c_1c_3)}{(3(-1+c_1+c_3))} \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Il polinomio di stabilità  $p(w, x, y)$  della famiglia di metodi rispetto all'equazione test di convoluzione (2.36) è:

$$p(w, x, y) = a_2(w-1)^2 + a_1(w-1) + a_0$$

$$a_2 = \frac{1}{(9(-1+c_1+c_3)(-1+2c_3))} - ((-1+xc_1-yc_1(-1+c_3))(3-6c_3+3xc_1(-1+2c_3)+yc_1(-1+3c_3))(3-3yc_1^3-c_1(3+y-3x(-1+c_3))-3c_3+3c_1^2(x+y+yc_3))) \quad (3.31)$$

$$\begin{aligned}
a_1 = & \frac{1}{(54(-1+c_1+c_3)(-1+2c_3))} - (9x^3(1-9c_1+18c_1^2) \\
& (-1+c_1+c_3)(-1+2c_3) - 3x^2(9(-1+6c_1)(-1+c_1+c_3)(-1+2c_3) \\
& + y(-5+18c_3-18c_3^2+6c_3^3+36c_1^4(-1+2c_3) \\
& - 9c_1^3(-15+30c_3+4c_3^2) + c_1(52-177c_3+162c_3^2-54c_3^3) \\
& + 3c_1^2(-52+155c_3-108c_3^2+36c_3^3))) + x(54(-1+c_1+c_3) \\
& (-1+2c_3) + 9y(3+c_1^2(32-66c_3)-9c_3+6c_3^2+6c_1^3(-1+2c_3) \\
& + c_1(-31+96c_3-72c_3^2+12c_3^3)) + y^2(7-27c_3+27c_3^2-9c_3^3 \\
& - 54c_1^5(-1+2c_3) + 9c_1^4(13-48c_3+36c_3^2) + 3c_1^2(91-282c_3 \\
& + 141c_3^2) + 3c_1(-26+93c_3-78c_3^2+21c_3^3) - 9c_1^3(35-81c_3 \\
& - 30c_3^2+48c_3^3))) + y(54(-1+c_1+c_3)(-1+2c_3) + y^2(1-4c_3 \\
& + 3c_3^2+9c_1^5(5-18c_3+12c_3^2) - 3c_1(4-15c_3+8c_3^2 \\
& + 3c_3^3) - 9c_1^4(-1+11c_3-24c_3^2+12c_3^3) + 3c_1^2(16 \\
& - 55c_3+12c_3^2+27c_3^3) - 3c_1^3(22-72c_3-3c_3^2 \\
& + 54c_3^3)) + 3y(2-9c_3+12c_3^2-6c_3^3+6c_1^3(-1+6c_3^2) \\
& - 3c_1^2(-9+20c_3+12c_3^3) + c_1(-28+117c_3-144c_3^2+72c_3^3))))
\end{aligned} \tag{3.32}$$

$$\begin{aligned}
a_0 = & \frac{1}{(108(-1+c_1+c_3)(-1+2c_3))} - (y(108(-1+c_1+c_3)(-1+2c_3) \\
& + 18x^2(1-9c_1+18c_1^2)(-1+c_1+c_3)(-1+2c_3) \\
& + y^2(1-9c_1+18c_1^2)(5-18c_3+12c_3^2)(1+3c_1^2-3c_1(1+c_3)) \\
& + 9y(1+c_1^2(28-60c_3)-3c_3+2c_3^2+12c_1^3(-1+2c_3) \\
& + c_1(-21+74c_3-72c_3^2+24c_3^3)) - 3x(-1+6c_1) \\
& (18(-1+c_1+c_3)(-1+2c_3) + y(7+c_1^2(39-84c_3) \\
& - 27c_3+30c_3^2-12c_3^3+18c_1^3(-1+2c_3) + c_1(-32+105c_3-90c_3^2+36c_3^3))))
\end{aligned} \tag{3.33}$$

Applicando l'algoritmo descritto nel paragrafo (§3.4 ) non abbiamo determinato un angolo di massima intersezione ma il risultato dell'algoritmo è stato di molti angoli di  $90^\circ$ . Verificando mediante il calcolo simbolico tutti i metodi determinati non abbiamo ottenuto nessun metodo  $V_0$ -stabile. Uno dei metodi determinati ha i seguenti parametri:

$$c_1 = \frac{27114}{36521}, \quad c_3 = \frac{14257}{28511}$$

abbiamo ottenuto un metodo con angolo di  $V_0(\alpha)$ -stabilità prossimo a  $90^\circ$ . Nella figura (3.16) abbiamo tracciato solo la parte di  $BL(R_f)$  che cade

nel terzo quadrante e che presenta un'intersezione con il semiasse negativo di  $x$  nel punto  $y = -215381.77575$  e la semiretta  $s_i$ , con  $i = 9999$  e  $\theta_n = 89,991$ . Poichè la parte del Boundary Locus  $BL(R_f)$  interseca il semiasse negativo delle  $x$  nell'intervallo  $[89.991^\circ, 90^\circ]$  l'angolo di output della procedura usata è  $\frac{\pi}{2}$ , si osservi che in questo specifico caso per poter trovare l'intersezione tra  $BL(R_f)$  e la semiretta  $s_i$  si deve operare una discretizzazione dell'angolo con  $np > 50000$ .

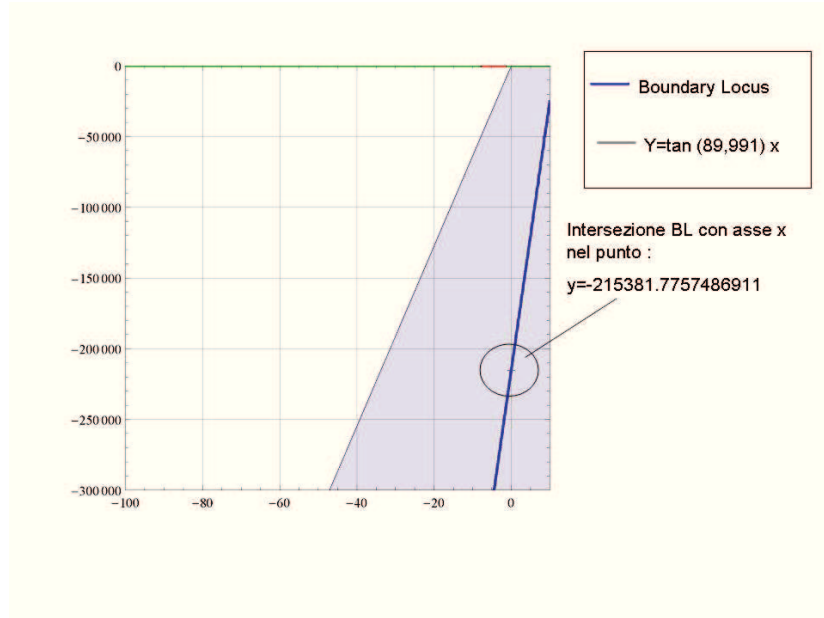


Figura 3.16: Esempio di metodo BVRK  $m=p=3$   $d_2 = d_3 = 1$  matrice A SDI con  $\alpha = 90^\circ$

In questo caso abbiamo considerato una matrice  $\mathbf{A}$  a struttura triangolare inferiore, cioè della forma:

$$A = \begin{bmatrix} a_{1,1} & 0 & 0 \\ a_{2,1} & a_{2,2} & 0 \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} \end{bmatrix}$$

$$\text{con } b = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix}, \quad c = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{bmatrix}, \quad d = \begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \end{bmatrix}.$$

L'uso di matrici di questo tipo dà vantaggi a livello computazionale ([33]). Imponendo le condizioni d'ordine tabella (2.1) abbiamo ottenuto la seguente famiglia a quattro parametri  $c_3, a_{2,2}, a_{3,2}, a_{3,3}$  di ordine  $p = 3$ :

$$A = \begin{bmatrix} \frac{(a_{3,2}(-2+3c_3)+3a_{2,2}(1-2c_3)^2(-2+3c_3)-(-1+2c_3)(2-3(2+a_{3,3})c_3+6c_3^2))}{(3(-1+2c_3)(-2+a_{3,2}+a_{3,3}+3a_{2,2}(1-2c_3)^2+6c_3-6c_3^2))} & 0 & 0 \\ \frac{(-2+a_{2,2}(3-6c_3)+3c_3)}{(-3+6c_3)} & a_{2,2} & 0 \\ -a_{3,2} - a_{3,3} + c_3 & a_{3,2} & a_{3,3} \end{bmatrix}$$

$$b = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{(3(1-2c_3)^2)}{(4(1-3c_3+3c_3^2))} \\ \frac{1}{(4-12c_3+12c_3^2)} \end{bmatrix} \quad c = \begin{bmatrix} \frac{(a_{3,2}(-2+3c_3)+3a_{2,2}(1-2c_3)^2(-2+3c_3)-(-1+2c_3)(2-3(2+a_{3,3})c_3+6c_3^2))}{(3(-1+2c_3)(-2+a_{3,2}+a_{3,3}+3a_{2,2}(1-2c_3)^2+6c_3-6c_3^2))} \\ \frac{(2-3c_3)}{(3-6c_3)} \\ c_3 \end{bmatrix}$$

$$d = \begin{bmatrix} \frac{(-4+3a_{3,2}+3a_{3,3}+9a_{2,2}(1-2c_3)^2+12c_3-12c_3^2)}{(3(-2+a_{3,2}+a_{3,3}+3a_{2,2}(1-2c_3)^2+6c_3-6c_3^2))} \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Il polinomio di stabilità  $p(w, x, y)$  della famiglia di metodi rispetto all'equazione test di convoluzione (2.36) è:

$$p(w, x, y) = a_2(w-1)^2 + a_1(w-1) + a_0;$$

Per semplicità di notazione la forma esplicita dei coefficienti  $a_2, a_1, a_0$  non viene di seguito riportata ma si osserva che  $a_2$  è polinomio di terzo grado in  $x$  e  $y$ ;  $a_1$  è un polinomio di terzo grado in  $x$  e  $y$  e  $a_0$  è un polinomio di secondo

grado in  $x$  e di terzo grado in  $y$ .

Applicando la tecnica descritta nel paragrafo (§3.4 ) e verificando mediante il calcolo simbolico abbiamo determinato un metodo con angolo  $\bar{\alpha} = 89,99^\circ$  con parametri:

$$c_3 = \frac{690}{1379}, \quad a_{2,2} = \frac{19}{93}, \quad a_{3,2} = 0, \quad a_{3,3} = \frac{50}{29}$$

Il polinomio di stabilità  $p(w, x, y)$  di tale metodo è:

$$\begin{aligned} p(w, x, y) = & \frac{1}{195462426632675502026484324} (195462426632675502026484324 + \\ & 32551344385778968332847488x^3 - 9429400807433239000851158652y \\ & + 10943907998245553740669776397y^2 - 2129466246508269812061574848y^3 \\ & + 162x^2(-661621733516756808995661 + 46295365072635869768839936y) \\ & + 12x(-24383358222490433449314486 + 992513038267790071107057703y \\ & + 41256498394536056192883024y^2) - 4w^2(-48865606658168875506621081 \\ & + 9785788806223736577539100x^3 + 2357350201858309750212789663y \\ & - 2736527756361079140853714132y^2 + 639247689463547128924378900y^3 \\ & + 12x^2(-5898933149093923944744144 + 188703113374304641729422625y) \\ & + x(122015681325640175854564539 - 5334889316661679963533962772y \\ & + 2408377906104478382918407300y^2)) + 2w(3295905419557988988654456x^3 \\ & + 15x^2(-5865535677559791543014061 + 49540193352964599527240416y) \\ & + x(390331511986222952405015994 - 16429691106936988877507763765y \\ & - 3707934517315297429608334132y^2) - 2(97731213316337751013242162 \\ & - 4665834797058450624918958245y + 3119226687952338565433920325y^2 \\ & + 1171770154306743308220007038y^3))) \end{aligned}$$

La figura, ottenuta utilizzando il calcolo simbolico, rappresenta il grafico Boundary Locus del metodo considerato. La parte in grigio indica la regione di  $V_0(\alpha)$ -stabilità con angolo  $\alpha = 89.99^\circ$ .

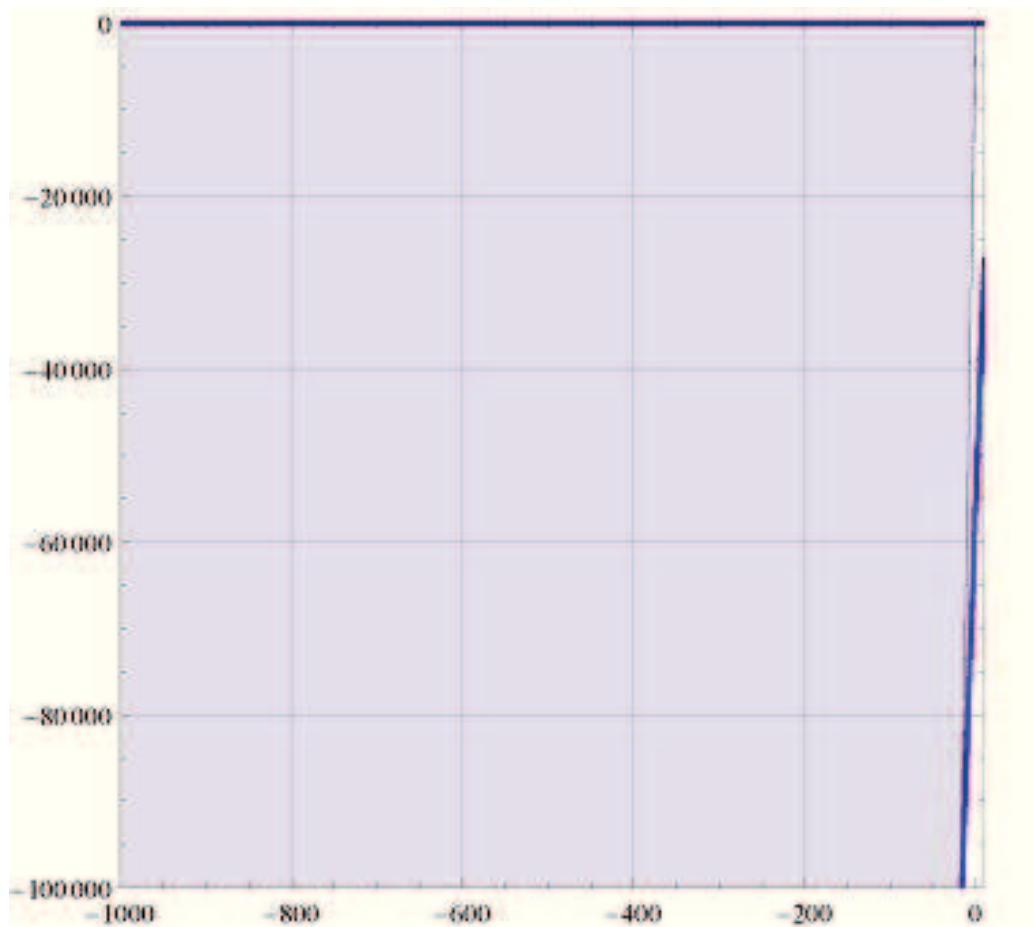


Figura 3.17: BL Metodo BVRK  $m=3$   $p=3$   $d_2 = d_3 = 1$  con matrice LT con retta  $y=\tan[89.99^\circ] x$

### 3.6.3 Caso $m=4$ ; $p=3$ ; $d_1=1$ ; $d_3=1$ ; $d_4=1$

In questo paragrafo trattiamo i BVRK (2.14) con numero di stadi  $m = 4$  abbiamo 28 parametri liberi quindi un elevato numero di parametri per imporre le condizioni d'ordine. Lavorare con tutti i parametri non sarebbe stato possibile ed allo scopo di eliminare metodi  $V_0$ -stabili con convenienti strutture della matrice dei coefficienti abbiamo scelto:

$$A = \begin{bmatrix} a_{1,1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a_{2,2} & 0 & 0 \\ 0 & a_{3,2} & a_{3,3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a_{4,4} \end{bmatrix}$$

$$b = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ b_4 \end{bmatrix}, \quad c = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \\ c_4 \end{bmatrix}, \quad d = \begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \\ d_4 \end{bmatrix}.$$

L'uso di matrici di questa forma dà dei vantaggi a livello computazionale per quanto riguarda il calcolo delle equazioni degli stadi interni. Imponendo le condizioni d'ordine tabella (2.1) abbiamo ottenuto la seguente famiglia a quattro parametri  $c_1, c_2, c_3, c_4$  di ordine  $p = 3$ :

$$A = \begin{bmatrix} c_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & c_2 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{((c_1 - c_3)(c_3 - c_4))}{((c_2 - c_3)(2 - 3c_4 + c_1(-3 + 6c_4)))} & \frac{(c_3(2c_2 - c_3 - c_4 - 3c_2c_4 + 3c_3c_4) + c_1(c_3^2(3 - 6c_4) + c_4 + c_3(-1 + c_2(-3 + 6c_4))))}{((c_2 - c_3)(2 - 3c_4 + c_1(-3 + 6c_4)))} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & c_4 \end{bmatrix}$$

$$b = \begin{bmatrix} \frac{(2 - 3c_4 + c_3(-3 + 6c_4))}{(6(c_1 - c_3)(c_1 - c_4))} \\ 0 \\ \frac{(-2 + c_1(3 - 6c_4) + 3c_4)}{(6(c_1 - c_3)(c_3 - c_4))} \\ \frac{(-2 + c_1(3 - 6c_3) + 3c_3)}{(6(c_1 - c_4)(-c_3 + c_4))} \end{bmatrix} \quad c = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \\ c_4 \end{bmatrix} \quad d = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 + c_2 - c_3 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (3.34)$$

Il polinomio di stabilità  $p(w, x, y)$  della famiglia di metodi rispetto all'equazione test di convoluzione (2.36) è:

$$p(w, x, y) = a_2(w - 1)^2 + a_1(w - 1) + a_0$$



Per semplicità di notazione la forma esplicita dei coefficienti  $a_2, a_1, a_0$  non viene di seguito riportata ma si osserva che  $a_2$  è polinomio di quarto grado in  $x$  e  $y$ ;  $a_1$  è un polinomio di quarto grado in  $x$  e  $y$  e  $a_0$  è un polinomio di terzo grado in  $x$  e di quarto grado in  $y$ .

Applicando l'algoritmo descritto nel paragrafo (§3.4 ) e verificando mediante il calcolo simbolico abbiamo determinato numerose quadruple di metodi  $V_0$ -stabili. Un esempio di metodo  $V_0$ -stabile è:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 5/7 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 7/8 & 0 & 0 \\ 0 & -(760/1057) & 760/1057 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 19/20 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{b} = [833/990, 0, 151/570, -(200/1881)]^T, \quad \mathbf{c} = [5/7, 7/8, 0, 19/20]^T,$$

$$\mathbf{d} = [1, 15/8, 1, 1]^T,$$

(3.35)

Il polinomio di stabilità  $p(w, x, y)$  di tale metodo è:

$$\begin{aligned}
p(w, x, y) = & \frac{1}{5966553600} (5966553600 - 1877938440x^4 - 11011857696y \\
& + 5707156404y^2 - 1083031520y^3 + 2235641y^4 \\
& - 6x^3(-367344320 + 418064867y) + 6x^2(1195604760 - 440803204y + 46948461y^2) \\
& + x(-13474278720 + 16076341188y - 5739111408y^2 + 914377169y^3) \\
& + 36w^2(165737600 + 70756000x^4 - 305884936y + 172343589y^2 \\
& - 28793930y^3 + 1010800y^4 + 13300x^3(-26527 + 12426y) \\
& + 5x^2(131284356 - 122552831y + 23854880y^2) \\
& + x(-540023120 + 752449969y - 288748985y^2 + 25775400y^3)) \\
& - 6w(111546260x^4 - x^3(1749510280 + 163995807y) \\
& - 2x^2(-2567067720 + 816594607y + 295645838y^2) \\
& + x(-5485851840 + 4451164092y + 409539848y^2 - 320726291y^3) \\
& - 6(-331475200 + 446032272y - 38802242y^2 - 48869797y^3 + 829447y^4)))
\end{aligned}$$

Di seguito riportiamo il grafico della regione di  $V_0$ -stabilità.

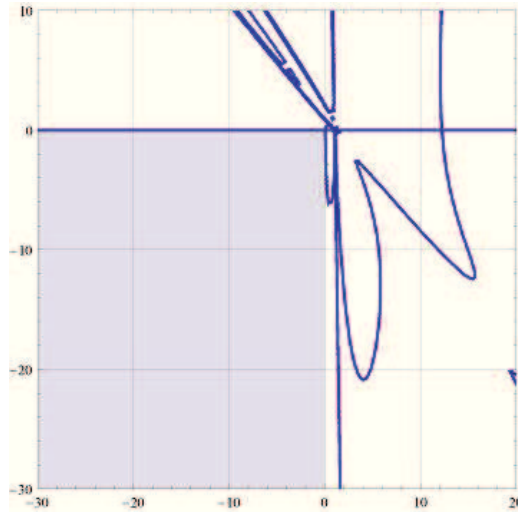


Figura 3.18: BL Metodo BVRK m=4 p=3  $d_1 = d_3 = d_4 = 1$   $V_0$ -stabile

La figura, ottenuta utilizzando il calcolo simbolico, rappresenta il grafico Boundary Locus del metodo considerato. La parte in grigio indica la regione di  $V_0$ -stabilità.

### 3.6.4 Caso $m=8$ ; $p=4$ ; $d_1 = d_3 = d_4 = d_5 = d_6 = d_7 = d_8 = 1$

Abbiamo lavorato con numero di stadi  $m = 4, 5, 6$  ma senza successo, i primi risultati li abbiamo ottenuti aumentando il numero degli stadi a  $m = 8$ . In questo caso il numero dei parametri è 88, allo scopo di avere un sufficiente numero di parametri liberi per ottenere l'ordine  $p = 4$  e metodi  $V_0$ -stabili, abbiamo considerato la seguente famiglia di metodi avente la seguente matrice dei coefficienti quasi diagonale:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{1,1} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a_{2,2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a_{3,2} & a_{3,3} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a_{4,4} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a_{5,4} & a_{5,5} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a_{6,6} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a_{7,6} & a_{7,7} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a_{8,8} \end{bmatrix}$$

e vettori  $\mathbf{c}$ ,  $\mathbf{d}$  e  $\mathbf{b}$ :

$$\mathbf{c} = [c_1, c_2, c_3, c_4, c_5, c_6, c_7, c_8]^T, \quad \mathbf{d} = [1, d_2, 1, 1, 1, 1, 1, 1]^T, \quad \mathbf{b} = [b_1, 0, b_3, b_4, b_5, b_6, b_7, b_8]^T.$$

Imponendo le condizioni d'ordine abbiamo determinato la seguente famiglia di metodi a 3 parametri di ordine 4 dipendente da  $b_7, c_1, c_8$ :

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} c_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{3}{4} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{4} + \frac{16}{9b_7} & \frac{13}{12} - \frac{16}{9b_7} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{5}{8} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{4}{3b_7} & \frac{7}{8} - \frac{4}{3b_7} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & c_8 \end{bmatrix} \quad (3.36)$$

e

$$\mathbf{c} = \left[ c_1, \frac{1}{4}, \frac{1}{2}, \frac{3}{4}, \frac{5}{6}, \frac{5}{8}, \frac{7}{8}, c_8 \right]^T, \quad \mathbf{d} = \left[ 1, \frac{1}{2}, 1, 1, 1, 1, 1, 1 \right]^T, \quad (3.37)$$

$$\mathbf{b} = \begin{bmatrix} \frac{27b_7^2(-7+8c_8)-60b_7(-3+10c_8)+256(-1+14c_8)}{24(-64+9b_7)(15-44c_1+32c_1^2)(c_1-c_8)} \\ 0 \\ \frac{4}{3} \\ -\frac{27b_7^2(-7+8c_1)(-7+8c_8)+1024(4-5c_8+c_1(-5+2c_8))+48b_7(42-61c_8+c_1(-61+98c_8))}{6(-64+9b_7)(-3+4c_1)(-3+4c_8)} \\ \frac{108b_7}{-64+9b_7} \\ \frac{27b_7^2(-7+8c_1)(-7+8c_8)+4096(2-3c_8+c_1(-3+2c_8))+192b_7(5(-1+c_8)+c_1(5+2c_8))}{3(-64+9b_7)(-5+8c_1)(-5+8c_8)} \\ b_7 \\ \frac{256-3584c_1-27b_7^2(-7+8c_1)+60b_7(-3+10c_1)}{24(-64+9b_7)(c_1-c_8)(15-44c_8+32c_8^2)} \end{bmatrix}. \quad (3.38)$$

Applicando l'algoritmo per la ricerca di metodi altamente stabili e verificando mediante il calcolo simbolico abbiamo ottenuto numerose terne di metodi  $V_0$ -stabile, per esempio scegliendo  $(c_1, c_8, b_7) = (30/43, 3/5, 69/40)$  abbiamo ottenuto il seguente polinomio di stabilità:

$$\begin{aligned}
p(w, x, y) = & (1/84594477367724318297948160000)(84594477367724318297948160000 - \\
& 2501291275365566427955200x^8 - 91518201482206067303016038400y + \\
& 40539470022287931993174835200y^2 - 7889403088304511870880972800y^3 + \\
& 231614006439408358399672320y^4 + 43971868061333111008869376y^5 + \\
& 5788365631287116869452608y^6 - 30214530217850436779136y^7 + \\
& 37239875743437983077y^8 - 1089208320x^7(250699416256971180 + 3143795638763219y) - \\
& 17018880x^6(-137368606466190074880 + 19235948758661904768y + 78167648073665315y^2) + \\
& 8509440x^5(13086873724746424320 + 194565318062152098304y - 9001586921743874600y^2 \\
& + 56257208253791193y^3) + 354560x^4(-40652745288238183219200 + 16179050959393422016512y - \\
& 1271948982884955412224y^2 + 235096908527153053536y^3 + 1614404927117956127y^4) + \\
& 16x^3(-1395682607426700992053248000 - 489087074209440677835571200y + \\
& 250913755343526629788139520y^2 - 41924006449913176172252160y^3 + 3689870215161654039337280y^4 + \\
& 11158618456979947755791y^5) + 4x^2(3678826665344333289934848000 - 17357633924425310041590988800y + \\
& 2966656898318112571014512640y^2 - 55693710871953558245376000y^3 - \\
& 34265664598462537170119680y^4 + 2966545740897907710245392y^5 + \\
& 5859119770398005009767y^6) + 4x(-49222672983815270751535104000 + \\
& 39993144920232196333318963200y - 13446013734104042337258700800y^2 + \\
& 1999122807967203672288460800y^3 - 86386940145810767259750400y^4 + \\
& 4843626295578977481622592y^5 + 119102520432049451460144y^6 + 326864907931541353231y^7) + \\
& 70713446400w^2(1196299737523814400 + 78960780288000x^8 - \\
& 1294212149758918656y + 573292239116320768y^2 - \\
& 133196956228116480y^3 + 17232870700429760y^4 - \\
& 1211065248738384y^5 + 41465986802127y^6 - 547069491540y^7 + \\
& 2331236700y^8 + 2764800x^7(-1222166597 + 67656784y) + \\
& 5760x^6(9147572200288 - 1260632446624y + 32911948095y^2) + \\
& 192x^5(-2083604072565760 + 520163337886016y - \\
& 34160958905475y^2 + 558605159775y^3) + 8x^4(208294017736458240 - 80308659157482496y + \\
& 9714698027639496y^2 - 403074374912820y^3 + \\
& 4626055298475y^4) + 4x^3(-997081984472186880 + 539879407779274752y - \\
& 101958549682738432y^2 + 7941133282004520y^3 - 232636676697225y^4 + 1991204905950y^5) + \\
& 2x^2(2731736444066856960 - 1945614519784833024y + \\
& 519309735283682304y^2 - 63939696945274880y^3 + \\
& 3593733390827730y^4 - 78660027280080y^5 + \\
& 521195784525y^6) + x(-3980645600424099840 + 3556477501330423808y - \\
& 1253216641018134528y^2 + 219658136350942720y^3 - \\
& 19801378403009600y^4 + 853112861966688y^5 - 14388795176175y^6 + 75705417450y^7) - \\
& 265920w(11591071108724797440x^8 + 16384x^7(-117518357938020795 + 394403497871074y) - \\
& 64x^6(-356295622421242721280 + 51411238625983759488y + \\
& 178364069004878851y^2) - \\
& 32x^5(3311345096135374970880 - 861379507948323203584y + \\
& 70771641590699835176y^2 + 524844031277216813y^3) - \\
& 4x^4(-97228175296878555955200 + 10618189551172074110976y - \\
& 2542198668060936785664y^2 + 176399614644031087136y^3 + \\
& 2303424260961970459y^4) - \\
& 4x^3(286138063684891783987200 - 11877821179230275174400y - \\
& 12825385206614287459328y^2 + 222120045891075624256y^3 + \\
& 18102118156482308756y^4 + 611888660185097239y^5) + \\
& x^2(2006220155861424144384000 - 319251126935706371358720y - \\
& 195216310124976553132032y^2 + 42691825908399051626496y^3 - \\
& 1276078757109614082880y^4 + 5998174795928166816y^5 - \\
& 320913620154355861y^6) + \\
& x(-1798946529927220533657600 + 647846834480070682214400y + \\
& 163192050849120595476480y^2 - 89816261860485660561408y^3 + \\
& 9928025858471440149760y^4 - 202974944146705715008y^5 + \\
& 1403847311915282916y^6 - 19993939529631869y^7) - \\
& 4(-159060013101166362624000 + 92548440881362643189760y + 3186787057184971161600y^2 - 10721915002025832284160y^3 + \\
& 2195832191126964808704y^4 - 145847412533499773760y^5 + \\
& 1340267041425401120y^6 - 17131443559071485y^7 + \\
& 147580104298926y^8)))
\end{aligned}$$

## 3.7 Prove numeriche

Abbiamo implementato il metodo (3.35) e il metodo (3.36)-(3.38) con  $(c_1, c_8, b_7) = (30/43, 3/5, 69/40)$  per poter verificare ordine e convergenza con un codice a passo fisso ed eseguito i test numerici sui casi non lineari e lineari presi in letteratura [9], [39]. Per ognuno dei test numerici e per ogni metodo abbiamo effettuato una scelta del numero dei passi usando la formula  $n = 100 \cdot 2^i$ ,  $i = 0, \dots, 5$  e calcolato la corrispondente soluzione numerica  $y_n$ . Il numero delle cifre corrette è stato calcolato con la formula  $(cd_h) = -\log_{10}(err_h)$  con  $err_h = |y(t_f) - y_n|$ ,  $t_f = hn$  e la stima dell'ordine è stata effettuata come  $(cd_{h/2} - cd_h)/\log_{10}(2)$ . Nel seguito riportiamo i test numerici eseguiti.

### 3.7.1 Problema 1

Consideriamo il seguente problema lineare:

$$y(t) = 1 + t - \cos(t) - \int_0^t \cos(t-s)y(s)ds \quad t \in [0, 5]$$

soluzione vera:

$$y(t) = t$$

Metodo $p = 3$ $m = 4$			Metodo $p = 4$ $m = 8$		
$h$	$cd_h$	$est. ord.$	$h$	$cd_h$	$est. ord.$
$5 \cdot 10^{-2}$	4.80	—	$5 \cdot 10^{-2}$	6.55	—
$2.5 \cdot 10^{-2}$	5.69	2.95	$2.5 \cdot 10^{-2}$	7.76	4.01
$1.25 \cdot 10^{-2}$	6.58	2.97	$1.25 \cdot 10^{-2}$	8.97	4.01
$6.25 \cdot 10^{-3}$	7.48	2.98	$6.25 \cdot 10^{-3}$	10.17	4.01
$3.125 \cdot 10^{-3}$	8.38	2.99	$3.125 \cdot 10^{-3}$	11.45	4.24
$1.563 \cdot 10^{-3}$	9.29	3.00	$1.563 \cdot 10^{-3}$	12.73	4.23

### 3.7.2 Problema 2

Consideriamo il seguente problema lineare :

$$y(t) = t + ((1 + t^2)e^{(-t^2)}) - 1 + \int_0^t t^2 e^{-ts} y(s) ds \quad t \in [0, 5]$$

soluzione vera:

$$y(t) = t$$

Metodo $p = 3 \ m = 4$		
$h$	$cd_h$	$est. \ ord.$
$5 \cdot 10^{-2}$	3.56	—
$2.5 \cdot 10^{-2}$	4.48	3.03
$1.25 \cdot 10^{-2}$	5.38	3.01
$6.25 \cdot 10^{-3}$	6.29	3.00
$3.125 \cdot 10^{-3}$	7.19	3.00
$1.563 \cdot 10^{-3}$	8.10	3.00

Metodo $p = 4 \ m = 8$		
$h$	$cd_h$	$est. \ ord.$
$5 \cdot 10^{-2}$	4.92	—
$2.5 \cdot 10^{-2}$	6.12	3.97
$1.25 \cdot 10^{-2}$	7.32	3.99
$6.25 \cdot 10^{-3}$	8.53	3.99
$3.125 \cdot 10^{-3}$	9.73	3.99
$1.563 \cdot 10^{-3}$	10.94	4.04

### 3.7.3 Problema 3

Consideriamo il seguente problema non lineare:

$$y(t) = 2 - \cos(t) - \int_0^t \sin(ty(s) - s)ds \quad t \in [0, 5]$$

soluzione vera:

$$y(t) = 1$$

Metodo $p = 3$ $m = 4$		
$h$	$cd_h$	$est. \text{ ord.}$
$5 \cdot 10^{-2}$	4.68	—
$2.5 \cdot 10^{-2}$	5.50	2.72
$1.25 \cdot 10^{-2}$	6.36	2.85
$6.25 \cdot 10^{-3}$	7.24	2.92
$3.125 \cdot 10^{-3}$	8.13	2.96
$1.563 \cdot 10^{-3}$	9.03	2.98

Metodo $p = 4$ $m = 8$		
$h$	$cd_h$	$est. \text{ ord.}$
$5 \cdot 10^{-2}$	5.77	—
$2.5 \cdot 10^{-2}$	6.93	3.84
$1.25 \cdot 10^{-2}$	8.11	3.92
$6.25 \cdot 10^{-3}$	9.30	3.96
$3.125 \cdot 10^{-3}$	10.50	3.98
$1.563 \cdot 10^{-3}$	11.74	4.10



### 3.7.4 Problema 4

Consideriamo il seguente problema non lineare:

$$y(t) = e^{-t} + \int_0^t e^{s-t} [y(s) + e^{-y(s)}] ds \quad t \in [0, 5]$$

soluzione vera:

$$y(t) = \log(t + e)$$

Metodo $p = 3$ $m = 4$		
$h$	$cd_h$	$est. \text{ ord.}$
$5 \cdot 10^{-2}$	4.56	—
$2.5 \cdot 10^{-2}$	5.43	2.90
$1.25 \cdot 10^{-2}$	6.32	2.95
$6.25 \cdot 10^{-3}$	7.22	2.98
$3.125 \cdot 10^{-3}$	8.12	2.99
$1.563 \cdot 10^{-3}$	9.02	2.99

Metodo $p = 4$ $m = 8$		
$h$	$cd_h$	$est. \text{ ord.}$
$5 \cdot 10^{-2}$	5.26	—
$2.5 \cdot 10^{-2}$	6.47	4.03
$1.25 \cdot 10^{-2}$	7.68	4.02
$6.25 \cdot 10^{-3}$	8.89	4.01
$3.125 \cdot 10^{-3}$	10.10	4.01
$1.563 \cdot 10^{-3}$	11.34	4.13

### 3.7.5 Problema 5

Consideriamo il seguente problema lineare:

$$y(t) = \frac{t^2}{2}e^{-t} + \int_0^t \frac{(t-s)^2}{2}e^{(s-t)}y(s)ds \quad t \in [0, 5]$$

soluzione vera:

$$y(t) = \frac{1}{3}(1 - e^{-\frac{3}{2}t})[\cos(\frac{\sqrt{3}t}{2}) + \sqrt{3}\sin(\frac{\sqrt{3}t}{2})]$$

Metodo $p = 3 \ m = 4$			Metodo $p = 4 \ m = 8$		
$h$	$cd_h$	$est. \ ord.$	$h$	$cd_h$	$est. \ ord.$
$5 \cdot 10^{-2}$	6.14	—	$5 \cdot 10^{-2}$	7.30	—
$2.5 \cdot 10^{-2}$	7.04	2.99	$2.5 \cdot 10^{-2}$	8.50	3.98
$1.25 \cdot 10^{-2}$	7.95	3.00	$1.25 \cdot 10^{-2}$	9.71	3.99
$6.25 \cdot 10^{-3}$	8.85	3.00	$6.25 \cdot 10^{-3}$	10.90	3.99
$3.125 \cdot 10^{-3}$	9.76	3.00	$3.125 \cdot 10^{-3}$	12.10	3.99
$1.563 \cdot 10^{-3}$	10.66	3.00	$1.563 \cdot 10^{-3}$	13.42	4.37

### 3.7.6 Problema 6

Consideriamo il seguente problema non lineare:

$$y(t) = 1 + \sin^2(t) - \int_0^t 3\sin(t-s)y^2(s)ds \quad t \in [0, 5]$$

soluzione vera:

$$y(t) = \cos(t)$$

Metodo $p = 3 \ m = 4$			Metodo $p = 4 \ m = 8$		
$h$	$cd_h$	$est. \ ord.$	$h$	$cd_h$	$est. \ ord.$
$5 \cdot 10^{-2}$	2.04	—	$5 \cdot 10^{-2}$	3.59	—
$2.5 \cdot 10^{-2}$	2.92	2.91	$2.5 \cdot 10^{-2}$	4.72	3.74
$1.25 \cdot 10^{-2}$	3.81	2.96	$1.25 \cdot 10^{-2}$	5.89	3.89
$6.25 \cdot 10^{-3}$	4.70	2.98	$6.25 \cdot 10^{-3}$	7.08	3.95
$3.125 \cdot 10^{-3}$	5.61	2.99	$3.125 \cdot 10^{-3}$	8.28	3.98
$1.563 \cdot 10^{-3}$	6.51	3.00	$1.563 \cdot 10^{-3}$	9.60	4.39

**Osservazione:** Dalle tabelle precedenti, che riportano i risultati dei test numerici effettuati, si evince che per tutti i problemi test considerati entrambi i metodi numerici sono convergenti con ordine uguale a tre per il primo metodo numerico (3.35) e ordine uguale a quattro per il secondo metodo numerico (3.36),(3.38) con  $(c_1, c_8, b_7) = (30/43, 3/5, 69/40)$ .

# Conclusioni

Obiettivo della tesi è stato determinare metodi numerici di ordine  $p > 2$   $V_0$ -stabili nella classe dei metodi di tipo Runge-Kutta Pouzet e Bel'tyukov. Le principali problematiche che si incontrano nella ricerca di metodi di ordine alto e incondizionatamente stabili rispetto all'equazione test di convoluzione (2.36) riguardano principalmente la non facile *gestione* delle numerose condizioni d'ordine non lineari per  $p > 2$  e la individuazione di un criterio generale per la determinazione della  $V_0$ -stabilità all'interno di una famiglia di metodi di ordine  $p > 2$ . Al fine di raggiungere l'obiettivo della tesi è stata introdotta una nuova definizione di  $V_0(\alpha)$ -stabilità, adattato alle VIEs della tecnica del Boundary Locus già esistente per le Equazioni Differenziali Ordinarie (ODEs) e ideato un nuovo metodo per la costruzione di metodi  $V_0(\alpha)$  e  $V_0$ -stabili. Questo metodo che si basa sull'introduzione di una funzione per l'approssimazione dell'angolo  $\alpha$  di  $V_0(\alpha)$ -stabilità e sull'utilizzo dell'algoritmo di ottimizzazione di Nelder-Mead, ha permesso di determinare una lista di metodi *candidati* ad essere  $V_0$ -stabili. La  $V_0$ -stabilità di ciascun metodo *candidato* è stata provata applicando il criterio di Routh-Hurwitz.

Sono stati determinati i primi esempi presenti in letteratura di metodi numerici  $V_0$ -stabili di ordine tre e quattro (rispettivamente su quattro e otto stadi) analizzando la classe dei metodi di tipo Bel'tyukov mentre nessun metodo  $V_0$ -stabile è stato determinato appartenente alla classe dei PVRK in accordo con la congettura di Brunner et al. ([7]). Sviluppi futuri riguarderanno la determinazione di metodi VRK di ordine superiore a quattro, lo sviluppo di un

software a passo variabile e la generalizzazione del metodo per la costruzione di altre classi di metodi.

# Bibliografia

- [1] C. T. H. Baker, *A perspective on the numerical treatment of Volterra equations*, J. Comput. Appl. Math., 125, pp. 217-249, 2000.
- [2] H. Brunner, *Collocation Methods for Volterra Integral and Related Functional Equations*, Cambridge University Press, Cambridge, 2004.
- [3] J. Guardiola, G. Izzo, A. Vecchio, *Simulating the effect of vaccine induced immune responses on HIV-1 infection*, Human Immunology, 64, pp. 840-851, 2003.
- [4] N. Ferraro, *A class of parallel  $V_0$ -stable methods for Volterra integral equations*, Ricerche di Mat. 44, no. 1, pp. 221-230, 1995.
- [5] P.J. Van der Houwen, *Convergence and stability analysis of Runge-Kutta type methods for Volterra integral equations of the second kind*, Report NW 83/80, Mathematisch Centrum, Amsterdam, 1980.
- [6] P.H.M Wolkenfelt, *On the numerical stability of reducible quadrature methods for second kind Volterra integral equations*, Z. Angew. Math. Mech. 61, pp. 399-401, 1981.
- [7] H. Brunner, S.P. Nørsett and P.H.M. Wolkenfelt, *On  $V_0$ -stability of numerical methods for Volterra integral equations of the second kind*, Report NW84/80, Mathematisch Centrum, Amsterdam, 1980.

- [8] A. Bellen, Z. Jackiewicz, R. Vermiglio and M. Zennaro, *Stability analysis of Runge-Kutta methods for Volterra integral equations of the second kind*, IMA J. Numer. Anal. 10, pp. 103-118, 1990.
- [9] H. Brunner, P. J. van der Houwen, *The numerical solution of Volterra linear equations*, North-Holland, Amsterdam, 1986.
- [10] H. Brunner, E. Hairer, S. P. Nørsett, *Runge-Kutta Theory for Volterra Integral Equations of the Second Kind*, Mathematics of Computation, Vol. 39, No. 159, pp. 147-163, Jul., 1982.
- [11] P. Albrecht, P. Albrecht, *The extension of the theory of A-methods to RK methods*, in: *Numerical Treatment of Differential Equations*, Proc. 4th Seminar NUMDIFF-4, ed K. Strehmel, Tuebner-Texte zur Mathematik (Tuebner, Leipzig), pp. 8-18, 1987.
- [12] R. K. Miller, *Nonlinear Volterra Integral Equations*, Benjamin/Cummings Publishing, Menlo Park California, 1971.
- [13] E. Hairer, *Order conditions for numerical methods for partitioned ordinary differential equations*, Numer. Math., v. 36, pp. 431-445, 1981.
- [14] P. J. van der Houwen, P. H. M. Wolkenfelt and C. T. H. Baker, *Convergence and stability analysis for modified Runge-Kutta methods in the numerical treatment of second-kind Volterra integral equations*, IMA J. Numer. Anal., v. 1, pp. 303-328, 1981.
- [15] H. Brunner, *Collocation methods for one-dimensional Fredholm and Volterra integral equations*, in *The State of the Art in Numerical Analysis* (A. Iserles and M. J. D. Powell, eds.), Clarendon Press, Oxford, pp. 563-600, 1987.
- [16] H. Brunner and S. P. Nørsett, *Superconvergence of collocation methods for Volterra and Abel integral equations of the second kind*, Numer. Math., v. 36, pp. 347-358, 1981.

- [17] A.Bellen,Z.Jackiewicz,R.Vermiglio and M.Zennaro, *Natural continuous extensions of Runge-Kutta methods for Volterra integral equations of the second kind and their applications*, Math Comp. 52,pp. 49-63, 1989.
- [18] W.A.Coppel, *Stability and Asymptotic Behavior of Differential Equations*, D.C. Heath and Co., Boston, Mass. viii+166 pp.,1965.
- [19] D.A.Sanchez, *Ordinary differential equations and stability theory: An introduction*, Freeman, San Francisco, pp. 410-419,1968.
- [20] T.A. Burton, *Volterra integral and differential equations*, Mathematics in Science and Engineering, 167. Academic Press, Inc., Orlando, FL, x+313pp., 1983.
- [21] P.J.van der Houwen, *Convergence and Stability results in Runge-Kutta type methods for Volterra Integral Equations of the second kind*, BIT, v 20,pp 375-377, 1980.
- [22] E. Kamke, *Differentialgleichungen, Lösungsmethoden und Lösungen I: Gewöhnliche Differentialgleichungen*. Neunte Auflage. Mit einem Vorwort von Detlef Kamke. B. G. Teubner, Stuttgart, xxvi+668 pp., 1977.
- [23] S. Amini, *Stability analysis of methods employing reducible rules for Volterra Integral Equations*, BIT, 23, pp. 322-328,1983.
- [24] W.E.Olmstead, R.A. Handelsman, *Diffusion in a semi-infinite region with a nonlinear surface dissipation*, SIAM Rev, 2 , pp.275-291, 1976.
- [25] R.S. Nicholson ,I. Shain, *Theory of stationary Electrode Polrography-Single scan and cyclic methods applied to reversible, irreversible and kinetic systems*, Analytical chemistry, n.36, pp.706-723, 1964.
- [26] J. Guardiola, A. Vecchio, *A distributed delay model of viral dynamics*, WSEAS, *transactions on biology and biomedicine*, 1, pp. 36-41, 2005.



- [27] O. Diekmann, *On a nonlinear integral equation arising in mathematical epidemiology*, Differential equations and applications (Proc. Third Scheveningen Conf., Scheveningen, 1977), pp.133-140 North-Holland Math. Stud., 31, North-Holland, Amsterdam-New York, 1978.
- [28] R.J. Duffin, *Algorithms for classical stability problems*, SIAM Rev. 11, pp. 196-213, 1969.
- [29] J. Schur, *Über Potenzreihen, die im Innern des Einheitskreises beschränkt sind*, J. Reine Angew. Math. 147, pp. 205-232, 1916.
- [30] J.D.Lambert, *Numerical methods for ordinary differential systems*, John Wiley & Sons, Ltd., Chichester, 1991.(nuovo)
- [31] J.D.Lambert, *Computational methods in ordinary differential equations*, John Wiley & Sons, London-New York-Sydney, xv+278 pp, 1973. (vecchio)
- [32] J.M.Ortega, *Matrix theory. A second course*, New York: Academic Press, 1987.
- [33] R. Alexander, *Diagonally Implicit Runge-Kutta Methods for Stiff O.D.E.'s*, SIAM Journal on Numerical Analysis, Vol 14. No. 6 , pp 1006-1021, 1977.
- [34] J.C. Butcher, *Numerical Methods for Ordinary Differential Equations*, Second Edition, John Wiley & Sons, Chichester, xx+463 pp, 2008.
- [35] J. Nelder and R. Mead, *A simplex method for function minimization*, The Computer Journal, 8, pp. 308-313, 1965.
- [36] P.Pouzet, *Etude en vue de leur traitement numerique des equations integrales de type Volterra*, Rev. FranVais Traitement Information (Chiffres), v. 6, pp. 79-112 , 1963.

- [37] P.H.M. Wolkenfelt, *Modified multilag methods for Volterra functional equations*, Math. Comp. 40 ,pp. 301-316, 1983.
- [38] G. Izzo, Z. Jackiewicz, E. Messina and A. Vecchio, *General linear methods for Volterra integral equations*, J. Comp. and Appl. Math. 234 no. 9, pp. 2768-2782, 2010.
- [39] J.G. Blom, H. Brunner, *The numerical solution of nonlinear Volterra integral equations of the second kind by collocation and iterated collocation methods*, SIAM J. Sci. Statist. Comput. 8 (5), pp. 806-830, 1987.
- [40] A. Vecchio, *Highly stable parallel Volterra Runge-Kutta methods*, J. Comput. Appl. Math. 71 ,pp. 225-236, 1996.
- [41] L. Lopez, *Metodi ad un passo fortemente stabili per le equazioni integrali di Volterra di seconda specie di tipo stiff*, Calcolo 23 no.3 ,pp. 249-263, 1987.
- [42] G. Piazza, *Metodi numerici per equazioni di Volterra di seconda specie*, Calcolo XXI, pp. 127-149, 1984.